

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 32.3

ΘΕΜΑ 1

α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

$$\begin{aligned}\log \frac{x^8}{10y^5} &= \log x^8 - \log 10y^5 = \\ &= 8\log x - (\log 10 + \log y^5) = \\ &= 8\log x - \log 10 - 5\log y = \\ 8 \cdot \alpha - 1 - 5 \cdot \beta &\Rightarrow 8\alpha - 5\beta - 1\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3

Θέτουμε $\frac{2x+y}{2} = \alpha$, $\frac{6x-y}{2} = \beta$ και το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} 3^{2\alpha} + 3^\alpha - 2 = 0 \\ 2^{2\beta} - 3 \cdot 2^\beta - 4 = 0 \end{cases}$$

Λύνουμε κάθε εξίσωση ξεχωριστά :

Θέτουμε $3^\alpha = z$ και η εξίσωση γράφεται : $z^2 + z - 2 = 0$

$$\Delta = 9 \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Για $z = 1 \Rightarrow 3^\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

Για $z = -2 \Rightarrow 3^\alpha = -2$ αδύνατη

Θέτουμε $2^\beta = \omega$ και η δεύτερη εξίσωση γράφεται : $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$

$$\Delta = 25 \quad \omega_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Για $\omega = 4 \Rightarrow 2^\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$

Για $\omega = -1 \Rightarrow 2^\beta = -1$ αδύνατη

Άρα για να βρούμε τα x, y αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+y}{2} = 0 \\ \frac{6x-y}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 6x + 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 8x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

Από την εκφώνηση έχουμε ότι :

$$\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} \stackrel{x \neq y \neq z \neq x}{\Rightarrow} (z-x)\log x = (y-z)\log y \quad (1)$$

Και

$$\frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} \Rightarrow \log y(x-y) = \log z(z-x) \quad (2)$$

Από τις (1),(2) με πρόσθεση κατά μέλη :

$$(z-x)(\log x + \log z) = \log y(y-z+x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z-x)\log(xz) = (x-z)\log y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z-x)(\log(xz) + \log y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z-x)\log(x \cdot y \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(xyz) = 0 \stackrel{z \neq x}{\Rightarrow} xyz = 1$$