

31.15

$$\alpha^a \beta^b > \alpha^b \beta^a \quad , \quad \alpha, \beta > 0 \quad , \quad \alpha \neq \beta$$

$$\Leftrightarrow \log(\alpha^a \beta^b) > \log(\alpha^b \beta^a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log \alpha^a + \log \beta^b > \log \alpha^b + \log \beta^a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \log \alpha + b \log \beta > b \log \alpha + a \log \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(\log \alpha - \log \beta) + b(\log \beta - \log \alpha) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\log \alpha - \log \beta) > 0 \Leftrightarrow (a-b) \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) > 0 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

$$\textbf{i)} \quad a > b > 0 \Rightarrow (a-b) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} > 1 \Rightarrow \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) > 0$$

$$\text{Άρα : } (a-b) \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) > 0 \quad \text{και η (1) ισχύει}$$

$$\textbf{ii)} \quad 0 < a < b \Rightarrow (a-b) < 0 \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) < 0$$

$$\text{Άρα } (a-b) \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) > 0 \quad \text{και η (1) ισχύει}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει η αποδεικτέα.