

31.11 1)

$$5^{x+1} \geq 24 + 5^{x-1} \Rightarrow 5 \cdot 5^x \geq 24 + \frac{5^x}{5} \Rightarrow 25 \cdot 5^x \geq 120 + 5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 \cdot 5^x \geq 120 \Rightarrow 5^x \geq 5 \Rightarrow x \geq 1$$

31.11 2)

Θέτω $4^x = \omega$ και η ανίσωση γράφεται :

$$\omega^2 - 17\omega + 16 > 0 \quad \Delta = 225 \quad \omega_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{2} \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 1 \\ \searrow \omega_2 = 16 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (\omega - 1)(\omega - 16) > 0 \quad \begin{matrix} 1 & 16 \\ + & | & - & | & + \\ \hline \end{matrix} \Rightarrow$$

$\omega < 1$ $\Rightarrow 4^x < 1$ $\Rightarrow 4^x < 4^0$ $\Rightarrow x < 0$	ή	$\omega > 16$ $\Rightarrow 4^x > 16$ $\Rightarrow 4^x > 4^2$ $\Rightarrow x > 2$
---	---	---

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

31.11 3)

Περιορισμοί : $\begin{cases} 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\log \sqrt{2-x} < \log x \Rightarrow \sqrt{2-x} < x \Rightarrow x^2 > 2-x \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

$$\Delta = 9 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = -2 \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow (x+2)(x-1) > 0 \quad \begin{matrix} -2 & 1 \\ + & | & - & | & + \\ \hline \end{matrix} \Rightarrow x < -2 \text{ ή } x > 1$$

Άρα πρέπει $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ και $x \in (0, 2)$



$$\Rightarrow x \in (0, 1)$$

31.11 4)

Περιορισμοί : $\begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\begin{aligned}\log(x+1) - \log(x-1) &> \log 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &> \log 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x+1 &> 2x-2 \Rightarrow x < 3\end{aligned}$$

Άρα πρέπει $x > 1$ και $x < 3$

$$\Rightarrow x \in (1, 3)$$

31.11 5)

$$3^{3x-1} > 2^{5x+1} \xRightarrow[2^{5x+1} > 0]{3^{x-1} > 0} \log 3^{3x-1} > \log 2^{5x+1} \Rightarrow (3x-1)\log 3 > (5x+1)\log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x\log 3 - \log 3 > 5x\log 2 + \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3\log 3 - 5\log 2) > \log 2 + \log 3$$

$$\text{είναι : } 3\log 3 - 5\log 2 = \log 27 - \log 32 = \log\left(\frac{27}{32}\right) < \log(1) = 0$$

Άρα διαιρούμε και αλλάζουμε φορά

$$\Rightarrow x < \frac{\log 2 + \log 3}{3\log 3 - 5\log 2}$$

31.11 6)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}} \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} \leq 3 \xRightarrow{y=\left(\frac{1}{2}\right)^x} y + \frac{2}{y} \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 + 2}{y} \leq 3 \Rightarrow y^2 + 2 \leq 3y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2} < 1} -1 \leq x \leq 0$$

31.11 7)

Περιορισμοί : $x^2 - 5x + 7 > 0$

$$\Delta = -3 < 0 \quad \text{άρα} \quad x^2 - 5x + 7 > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$100^{\frac{1}{2}\log(x^2-5x+7)} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 100^{\frac{1}{2}\log(x^2-5x+7)} > \log 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \log(x^2-5x+7) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(x^2-5x+7) > \log 1 \Rightarrow x^2-5x+7 > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x+7 > 0$$

$$\Delta = 1 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow (x-2)(x-3) > 0 \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ + & - & + \\ + & | & - & | & + \end{matrix} \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

31.11 8)

Περιορισμοί: $x > 0$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$x^{\log x + 2} < 10^{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x^{\log x + 2} < \log 10^{15} \Rightarrow (\log x + 2) \log x < 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2 x + 2 \log x - 15 < 0$$

θέτω $\omega = \log x$ και η ανίσωση γράφεται :

$$\omega^2 + 2\omega - 15 < 0$$

$$\Delta = 64 \quad \omega_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 3 \\ \searrow \omega_2 = -5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -5 & 3 \\ + & | & - & | & + \\ \Rightarrow & -5 < \omega < 3 \end{matrix} \Rightarrow \log 10^{-5} < \omega < \log 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 10^{-5} < \log x < \log 10^{-3} \Rightarrow 10^{-5} < x < 10^{-3} \quad \text{που ικανοποιεί και τον περιορισμό}$$

31.11 9)

$$1 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1 < \log \left(\frac{2}{5}\right)^x < \log 4 \Rightarrow 0 < x \log \left(\frac{2}{5}\right) < \log 4$$

$$\text{είναι : } \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \log \left(\frac{2}{5}\right) < \log 1 = 0$$

$$\text{Άρα διαιρούμε με } \log \left(\frac{2}{5}\right) = \log 2 - \log 5 < 0 \quad \text{και αλλάζουμε φορά}$$

$$0 > x > \frac{\log 4}{\log 2 - \log 5} \Rightarrow \frac{\log 4}{\log 2 - \log 5} < x < 0$$

31.11 10)

$$16^{\frac{x}{2}} \leq 2^{x+1} + 3 \Rightarrow 4^x \leq 2 \cdot 2^x + 3 \Rightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 \leq 0$$

θέτω $2^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γράφεται :

$$\omega^2 - 2\omega - 3 \leq 0$$

$$\Delta = 16 \quad \omega_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα πρέπει} \quad \begin{array}{c} -1 \quad 3 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline \end{array} \Rightarrow \omega \in [-1, 3] \stackrel{\omega > 0}{\Rightarrow} \omega \in (0, 3]$$

$$\text{Άρα έχουμε} \quad 2^x \leq 3 \Rightarrow \log 2^x \leq \log 3 \Rightarrow x \log 2 \leq \log 3 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\log 2 > 0}{\Rightarrow} x \leq \frac{\log 3}{\log 2}$$