

29.20 1)

Αρκεί να δειχθεί ότι $f(-x) = -f(x)$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το συμμετρικό διάστημα $(-2, 2)$,
 άρα για κάθε $x \in (-2, 2)$, ορίζεται και το $f(-x)$.

$$\text{Πράγματι: } f(-x) = -x \cdot \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -x \cdot \log\left(\frac{1}{\frac{2-x}{2+x}}\right) =$$

$$= -x \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = x \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια.

29.20 2)

Αρκεί να δειχθεί ότι $f(-x) = -f(x)$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το συμμετρικό διάστημα $(-7, 7)$,
 άρα για κάθε $x \in (-7, 7)$, ορίζεται και το $f(-x)$.

$$\text{Πράγματι: } f(-x) = \log\left(\frac{7-x}{7+x}\right) = \log\left(\frac{1}{\frac{7+x}{7-x}}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{7+x}{7-x}\right)^{-1} = -\log\left(\frac{7+x}{7-x}\right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

29.20 3)

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} 3+x \neq 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ (3-x)(3+x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ -3 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 3$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το συμμετρικό διάστημα $(-3, 3)$,

άρα για κάθε $x \in (-3, 3)$ ορίζεται και το $f(-x)$

Ακόμη :

$$f(-x) = -x \log \frac{3-(-x)}{3-x} = -x \log\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = x \log\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-1} = x \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια.

29.20 4)

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ισχύει πάντα} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 > x \Rightarrow 1 > 0 \text{ ισχύει πάντα}$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το συμμετρικό $\mathbb{R}$,

άρα για κάθε x στο $\mathbb{R}$ ορίζεται και το $f(-x)$

Ακόμη :

$$f(-x) = \log\left(\sqrt{(-x)^2 + 1} - (-x)\right) = \log\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$$

Όμως παρατηρούμε ότι :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2} = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$\text{Οπότε : } f(-x) = \log\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) = \log\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^{-1} =$$

$$= -\log\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.