

29.19 1)

α) Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{συναλήθευση}} 0 < x < 10$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, 10)$

β) $f(x) = \log 2 \Rightarrow \log(1 - \log x) = \log 2 \Rightarrow 1 - \log x = 2 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$ η οποία γίνεται

δεκτή καθώς ανήκει στο πεδίο ορισμού της f (που ουσιαστικά είναι περιορισμός)

γ) $f(x) > 0 \Rightarrow \log(1 - \log x) > 0 \Rightarrow \log(1 - \log x) > \log 1 \Rightarrow 1 - \log x > 1 \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow \log x < \log 1 \Rightarrow x < 1$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με το πεδίο ορισμού της f . Έτσι

$$\begin{cases} 0 < x < 10 \\ x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{συναλήθευση}} 0 < x < 1. \text{ Επομένως η ανίσωση αληθεύει για } x \in (0, 1)$$

29.19 2)

α) πρέπει: $\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0 \xrightarrow{e^x + 5 > 0} e^{2x} > 1 \Rightarrow e^{2x} > e^0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$

β) $f(x) = \ln 2 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right) = 2 \ln 2 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x - 21 = 0$$

Έστω: $e^x = \omega > 0 \Rightarrow \omega^2 - 4\omega - 21 = 0$

$$\Delta = 100 \quad \omega_{1,2} = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} \nearrow \omega_1 = 7 \\ \searrow \omega_2 = -3 < 0 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα: $\omega = 7 \Rightarrow e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7$

29.19 3)

α) πρέπει: $x + 3 \neq 0$ και $\frac{3-x}{3+x} > 0$

Πίνακας Προσήμων

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$3-x$	+			-
$3+x$	-			+
Πηλίκο	-			-

Άρα πρέπει $x \in (-3, 3)$

β) $*f(0) = \ln\left(\frac{3-0}{3+0}\right) = \ln 1 = 0$

$$*f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}\right) = \ln\frac{8}{10}$$

$$\text{Είναι: } \frac{8}{10} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{8}{10}\right) < 0 = f(0) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) < f(0)$$

$$\gamma) f(x) = \ln 2 \Rightarrow \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = \ln 2 \Rightarrow \frac{3-x}{3+x} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3-x}{3+x} - \frac{2(3+x)}{3+x} = 0 \Rightarrow \frac{3-x-6-2x}{3+x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-3}{3+x} = 0 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$\delta) f(x) + f(x+1) > 0$$

Για να ορίζεται η $f(x+1)$ πρέπει :

$$-3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

$$f(x) + f(x+1) > 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) + \ln\left(\frac{2-x}{4+x}\right) > \ln 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{(3-x)(2-x)}{(3+x)(4+x)}\right) > \ln 1 \Rightarrow \frac{(3-x)(2-x)}{(3+x)(4+x)} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3-x)(2-x) - (3+x)(4+x)}{(3+x)(4+x)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6-3x-2x+x^2 - (12+3x+4x+x^2)}{(3+x)(4+x)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-5x+6-12-7x-x^2}{(3+x)(4+x)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-12x-6}{(3+x)(4+x)} > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{(3+x)(4+x)} < 0$$

Πίνακας Προσήμων

x	$-\infty$	-4	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-		-		+
$x+3$	-			+	+
$x+4$	-		+	+	+
Πηλίκο	-				+

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -4) \cup \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

Όμως από τους περιορισμούς, $x > -3$

$$\text{Άρα } x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

29.19 4)

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \quad , \quad g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

α) *Για την f :

$$\text{Πρέπει } e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$$

$$\text{Έστω } \omega = e^x > 0 \Rightarrow \omega^2 - 2\omega + 3 > 0$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \quad \text{άρα η } f \text{ ορίζεται για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

*Για την g :

$$\text{Πρέπει } e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$$

β) $f(x) = g(x)$

Η εξίσωση ορίζεται για $x > 0$

$$\Rightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1) \Rightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln(3e^x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 3 = 3e^x - 3 \Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{θέτω } e^x = \omega > 0 \Rightarrow \omega^2 - 5\omega + 6 = 0$$

$$\Delta = 1 \quad \omega_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 3 \\ \searrow \omega_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα : } \omega = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \text{ ή } \\ \omega = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

29.19 5)

α) πρέπει : $4^x + 7 \cdot 2^x \neq 0$ που ισχύει πάντα

$$\text{και } \frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x} > 0 \quad \xrightarrow{4^x + 7 \cdot 2^x > 0} \quad 16 \cdot 2^x > 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x > 2^{-1} \Rightarrow x > -1$$

$$\beta) f(x) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x}\right) = \ln 1 \Rightarrow 16 \cdot 2^x - 8 = 4^x + 7 \cdot 2^x \Rightarrow 4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$\text{θέτω } 2^x = \omega > 0 \Rightarrow \omega^2 - 9\omega + 8 = 0$$

$$\Delta = 49 \quad \omega_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 1 \\ \searrow \omega_2 = 8 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } * \omega = 1 &\Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ * \omega = 8 &\Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\gamma) \quad f(x) \leq 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \ln \left(\frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x} \right) \leq \ln \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 48 \cdot 2^x - 24 \leq 4 \cdot 4^x + 28 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 2^x - 6 \leq 4^x + 7 \cdot 2^x \Rightarrow 4^x - 5 \cdot 2^x + 6 \geq 0$$

$$\text{θέτω } 2^x = \omega \Rightarrow \omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 1 \quad \omega_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow \omega_1 = 3 \\ \searrow \omega_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα : } \omega \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

$$\Rightarrow 2^x < 2 \quad \text{και} \quad 2^x > 3$$

$$\Rightarrow x < 1 \quad \text{και} \quad x > \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\text{και για να ισχύει ο περιορισμός } x > -1$$

$$x \in (-1, 1) \cup \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}, +\infty \right)$$