

29.17 1)

Καταρχήν πρέπει $x > 0$. Με τον περιορισμό αυτό "λογαριθμίζουμε" τα δύο μέλη και έχουμε

$$100x^{\log x} < x^3 \Rightarrow \log(100x^{\log x}) < \log x^3 \Rightarrow \log 100 + \log x^{\log x} < 3\log x \quad \log 100=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \log x \cdot \log x < 3\log x \Rightarrow \log^2 x - 3\log x + 2 < 0 \quad \text{θέτουμε } y=\log x \Rightarrow y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$1 < y < 2 \Rightarrow 1 < \log x < 2 \Rightarrow \log 10 < \log x < \log 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 < x < 100$$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με τον περιορισμό. Έτσι

$$\begin{cases} x > 0 \\ 10 < x < 100 \end{cases} \xrightarrow{\text{συναλήθευση}} 10 < x < 100. \text{ Επομένως η ανίσωση αληθεύει για } x \in (10, 100)$$

29.17 2)

Κατ' αρχήν πρέπει $x > 0$

Με τον περιορισμό αυτόν "λογαριθμίζουμε" τα δύο μέλη και έχουμε :

$$x^{2\log x} > 100 \Rightarrow \log x^{2\log x} > \log 100 \Rightarrow 2\log x \cdot \log x > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2 x > 1 \Rightarrow y^2 > 1 \Rightarrow y^2 - 1 > 0 \Rightarrow y < -1 \text{ ή } y > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x < -1 \text{ ή } \log x > 1 \Rightarrow x < \frac{1}{10} \text{ ή } x > 10$$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με τον περιορισμό.

$$\text{Έτσι : } \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{10} \text{ ή } x > 10 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{10} \text{ ή } x > 10$$

$$\text{Επομένως η ανίσωση αληθεύει για } x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$$

29.17 3)

Κατ' αρχήν πρέπει $x > 0$

Με τον περιορισμό αυτόν "λογαριθμίζουμε" τα δύο μέλη και έχουμε :

$$x^{\ln x} \leq e \Rightarrow \ln x^{\ln x} \leq \ln e \Rightarrow \ln x \cdot \ln x \leq 1 \Rightarrow \ln^2 x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{y=\ln x} y^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq x \leq e$$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με τον περιορισμό.

$$\text{Έτσι : } \begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} \leq x \leq e \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e$$

$$\text{Επομένως η ανίσωση αληθεύει για } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

29.17 4)

Κατ' αρχήν πρέπει $x > 0$

Με τον περιορισμό αυτόν "λογαριθμίζουμε" τα δύο μέλη και έχουμε :

$$x^{1+\ln x} < e^2 \Rightarrow \ln x^{1+\ln x} < \ln e^2 \Rightarrow (1+\ln x)\ln x < 2\ln e \Rightarrow \ln x + \ln^2 x < 2 \Rightarrow \ln^2 x + \ln x - 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{y=\ln x} y^2 + y - 2 < 0 \Rightarrow -2 \leq y \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow e^{-2} \leq x \leq e$$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με τον περιορισμό.

$$\text{Έτσι : } \begin{cases} x > 0 \\ e^{-2} \leq x \leq e \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{e^2} \leq x \leq e$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για $x \in \left[\frac{1}{e^2}, e \right]$

29.17 5)

Κατ' αρχήν πρέπει $x > 0$

Με τον περιορισμό αυτόν ``λογαριθμίζουμε`` τα δύο μέλη και έχουμε :

$$x^{\log x} \leq 100x \Rightarrow \log x^{\log x} \leq \log 100x \Rightarrow \log x \cdot \log x \leq \log 100 + \log x \xRightarrow{\log 100=2} \log^2 x \leq 2 + \log x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log^2 x - \log x - 2 \leq 0 &\xRightarrow{y=\log x} y^2 + y - 2 < 0 &\xRightarrow{\Delta=1+8=9 \quad y_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}} \begin{matrix} y_1=2 \\ y_2=-1 \end{matrix} \\ &\Rightarrow -1 \leq y \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \log x \leq 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{-1} \leq x < 10^2 \end{aligned}$$

Τώρα όμως πρέπει να κάνουμε συναλήθευση με τον περιορισμό.

$$\text{Έτσι : } \begin{cases} x > 0 \\ 10^{-1} \leq x < 10^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{10} \leq x \leq 100$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για $x \in \left[\frac{1}{10}, 100 \right]$