

29.12 1)

Καταρχήν πρέπει $e^x + 1 > 0$ το οποίο όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (διότι $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 0$).

Ακόμη επειδή $x = \ln e^x$ έχουμε

$$x + \ln(e^x + 1) = \ln 2 \xrightarrow{x = \ln e^x} \ln e^x + \ln(e^x + 1) = \ln 2 \Rightarrow \ln[e^x \cdot (e^x + 1)] = \ln 2 \Rightarrow e^x \cdot (e^x + 1) = 2 \Rightarrow$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{θέτουμε } y = e^x} y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 \quad \text{ή} \quad y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x = -2 \quad \text{αδύνατη} \quad ||| \quad \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$

29.12 2)

Κατ' αρχήν πρέπει $e^x + 2 > 0$ το οποίο όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμη επειδή $x = \ln e^x$ έχουμε :

$$x + \ln(e^x + 2) = \ln 3 \xrightarrow{x = \ln e^x} \ln e^x + \ln(e^x + 2) = \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln[e^x(e^x + 2)] = \ln 3 \Rightarrow e^x(e^x + 2) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \xrightarrow{y = e^x} y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 \quad \Rightarrow y = -3$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow e^x = -3$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{αδύνατη}$$

29.12 3)

Κατ' αρχήν πρέπει $10^{2x} + 10 > 0$ το οποίο όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμη επειδή $x = \log 10^x$ έχουμε :

$$\log(10^{2x} + 10) = x + \log 11 \xrightarrow{x = \log 10^x} \log(10^{2x} + 10) = \log 10^x + \log 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(10^{2x} + 10) = \log(11 \cdot 10^x) \Rightarrow 10^{2x} + 10 = 11 \cdot 10^x \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{y = 10^x} y^2 + 10 = 11y \Rightarrow y^2 - 11y + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 \quad \Rightarrow y = 10$$

$$\Rightarrow 10^x = 1 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow 10^x = 10$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow x = 1$$

29.12 4)

Κατ' αρχήν πρέπει $e^{2x} + 6 > 0$ το οποίο όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμη επειδή $x = \ln e^x$ έχουμε :

$$\ln(e^{2x} + 6) - x = \ln 5 \xrightarrow{x = \ln e^x} \ln(e^{2x} + 6) - \ln e^x = \ln 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} + 6}{e^x}\right) = \ln 5 \Rightarrow \frac{e^{2x} + 6}{e^x} = 5 \Rightarrow e^{2x} + 6 = 5e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \xrightarrow{e^x = y} y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow e^x = 2$$

$$\Rightarrow x = \ln 2$$

$$\Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ή

29.12 5)

Κατ' αρχήν πρέπει $5^{2x} + 5 > 0$ το οποίο όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε έχουμε :

$$\log(5^{2x} + 5) - x \log 5 = \log 6 \Rightarrow \log(5^{2x} + 5) - \log 5^x = \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{5^{2x} + 5}{5^x}\right) = \log 6 \Rightarrow \frac{5^{2x} + 5}{5^x} = 6 \Rightarrow 5^{2x} + 5 = 6 \cdot 5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow \overset{y=5^x}{y^2 - 6y + 5 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$\Rightarrow 5^x = 1$$

ή

$$\Rightarrow 5^x = 5$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$