

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

B. Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολώνυμο $x-\rho$ γράφεται.

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολώνυμο υ . Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \upsilon$$

ΘΕΜΑ 2

Πρώτα γράφουμε τους περιορισμούς :

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Το ΕΚΠ είναι $(x-1)(x+1)$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ :

$$(x-1)(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} + (x-1)(x+1) \cdot \frac{8}{x^2-1} = (x-1)(x+1) \cdot \frac{4}{x-1} \quad \overset{x^2-1=(x-1)(x+1)}{\Rightarrow} (x-1) \cdot x + 8 = 4(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 8 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 9 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix} \quad \text{Δεκτή μόνο η λύση } x = 4$$

ΘΕΜΑ 3

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι :

$$P(x) = (x^2 - 1)\pi(x) + 3x + 4 \Rightarrow x^3 + x^2 + \alpha x + \beta = (x^2 - 1)\pi(x) + 3x + 4$$

• Για $x = 1$:

$$1^3 + 1^2 + \alpha + \beta = 3 + 4 \Rightarrow \alpha + \beta = 5 \quad (1)$$

• Για $x = -1$:

$$(-1)^3 + (-1)^2 - \alpha + \beta = -3 + 4 \Rightarrow \beta - \alpha = 1 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \beta - \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

β) Αρκεί να υπολογίσουμε το $Q(2)$

$$\text{Είναι : } Q(2) = 2 \cdot P(2 \cdot 2 - 3) + (2^2 - 2 - 1)P(2 - 3) \Rightarrow Q(2) = 2P(1) + P(-1)$$

$$\text{Όπου : } P(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$\text{Άρα : } Q(2) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

ΘΕΜΑ 4

α) Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι :

$$P(\alpha) = \beta, P(\beta) = \gamma, P(\gamma) = \alpha$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $Q(\alpha) = 0, Q(\beta) = 0, Q(\gamma) = 0$

Πράγματι :

$$\bullet Q(\alpha) = P(P(P(\alpha))) - \alpha = P(P(\beta)) - \alpha = P(\gamma) - \alpha = 0$$

$$\bullet Q(\beta) = P(P(P(\beta))) - \beta = P(P(\gamma)) - \beta = P(\alpha) - \beta = 0$$

$$\bullet Q(\gamma) = P(P(P(\gamma))) - \gamma = P(P(\alpha)) - \gamma = P(\beta) - \gamma = 0$$

Άρα οι α, β, γ είναι ρίζες $Q(x)$

β) Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \gamma$ είναι :

$$P(x) = (x - \gamma)\pi(x) + \alpha$$

• Για $x = \alpha$:

$$P(\alpha) = (\alpha - \gamma)\pi(\alpha) + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = (\alpha - \gamma)\pi(\alpha) + \alpha \Rightarrow \beta - \alpha = (\alpha - \gamma)\pi(\alpha) \quad (1)$$

• Για $x = \beta$:

$$P(\beta) = (\beta - \gamma)\pi(\beta) + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = (\beta - \gamma)\pi(\beta) + \alpha \Rightarrow \gamma - \alpha = (\beta - \gamma)\pi(\beta) \quad (2)$$

Από τις (1), (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

$$(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\pi(\alpha)\pi(\beta) \Rightarrow$$

$$\stackrel{\alpha \neq \gamma}{\Rightarrow} \pi(\alpha)\pi(\beta) = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}$$