

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

B. Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\alpha_v \rho^v + \alpha_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_v \rho^v - \alpha_{v-1} \rho^{v-1} - \dots - \alpha_1 \rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1)$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .

ΘΕΜΑ 2

Η $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης αφού $1^6 - 4 \cdot 1^4 - 1^2 + 4 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & -4 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

Άρα $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4) = 0$

Η $x=-1$ είναι ρίζα της δεύτερης παρένθεσης

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Άρα $(x-1)(x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$

Για την Τρίτη παρένθεση, έχουμε, θέτοντας : $x^2 = y$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow_{\Delta=25} y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow^{-1} \\ \searrow_4 \end{matrix}$$

Για $y=-1 \Rightarrow x^2 = -1$ αδύνατη

Για $y=4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x=2$ ή $x=-2$

Άρα η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τις : $x=1, x=-1, x=2, x=-2$

ΘΕΜΑ 3

α) i) Ο βαθμός του $P(x)$ είναι $2 \cdot 2014 = 4028$

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2$ είναι :

$$P(-2) = \left((-2)^2 + 5(-2) + 5 \right)^{2013} + \left((-2)^2 + 4(-2) + 4 \right)^{2014} =$$

$$= (4 - 10 + 5)^{2013} + (4 - 8 + 4)^{2014} = 1^{2013} + 0^{2014} = 1$$

β) i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(-3) = 0$

Πράγματι :

$$P(-3) = \left((-3)^2 + 5(-3) + 5 \right)^{2013} + \left((-3)^2 + 4(-3) + 4 \right)^{2014} =$$

$$= (9 - 15 + 5)^{2013} + (9 - 12 + 4)^{2014} = (-1)^{2013} + 1^{2014} = -1 + 1 = 0$$

ii) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x+3$, άρα το $P(x)$ γράφεται :

$$P(x) = (x+3)\pi(x)$$

παρατηρούμε ότι :

$$11^{2013} + 9^{2014} = (1^2 + 5 \cdot 1 + 5)^{2013} + (1^2 + 4 \cdot 1 + 4)^{2014} = P(1)$$

$$\text{Άρα } 11^{2013} + 9^{2014} = (1+3) \cdot \pi(1) \Rightarrow 11^{2013} + 9^{2014} = 4\pi(1)$$

Άρα ο αριθμός $11^{2013} + 9^{2014}$ είναι πολλαπλάσιο του 4

ΘΕΜΑ 4

α) Το $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $x^2 - 2x$ αφήνει υπόλοιπο $5x + 1$

Άρα από την ταυτότητα διαίρεσης έχουμε ;

$$P(x) = (x^2 - 2x)\pi'(x) + 5x + 1$$

• Για $x = 0$:

$$P(0) = (0^2 - 2 \cdot 0)\pi'(0) + 5 \cdot 0 + 1 \Rightarrow P(0) = 1$$

• Για $x = 2$:

$$P(2) = (2^2 - 2 \cdot 2)\pi'(2) + 5 \cdot 2 + 1 \Rightarrow P(2) = 11$$

β) Από την ταυτότητα διαίρεσης έχουμε : $P(x) = (x^2 + 2)\pi(x) - x + 1$

i) Το $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού , άρα το $\pi(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 1 ,

έστω $\pi(x) = \alpha x + \beta$

ii) Άρα είναι $P(x) = (x^2 + 2)(\alpha x + \beta) - x + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta - x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (2\alpha - 1)x + 2\beta + 1$$

Έχουμε : $P(0) = 1 \Rightarrow 2\beta + 1 = 1 \Rightarrow \beta = 0$

Και $P(2) = 11 \Rightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + (2\alpha - 1) \cdot 2 + 2\beta + 1 = 11 \Rightarrow$

$$\stackrel{\beta=0}{\Rightarrow} 8\alpha + 4\alpha - 2 + 1 = 11 \Rightarrow 12\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 1$$

Άρα , για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ έχουμε : $P(x) = x^3 + x + 1$

iii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $Q\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$

Πράγματι , $Q\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} + 1 =$

$$= \frac{1}{\rho^3} + \frac{\rho}{\rho^3} + \frac{\rho^3}{\rho^3} = \frac{\rho^3 + \rho + 1}{\rho^3} = \frac{P(\rho)}{\rho^3} = 0 \quad \text{αφού } P(\rho) = 0$$

Άρα ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του $Q(x)$