

ΘΕΜΑ 1

α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ 2

Πιθανές ρίζες οι ακέραιοι διαιρέτες του 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x^2 - x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=1, x=3, x=-2$

ΘΕΜΑ 3

Αφού το $\pi(x)$ έχει ρίζα το α_o , θα είναι $\pi(\alpha_o) = 0$

$$\text{Επίσης, } \pi(0) = \alpha_v 0^v + \alpha_{v-1} 0^{v-1} + \dots + \alpha_1 0 + \alpha_o = \alpha_o$$

$$\text{Άρα έχουμε: } \pi(\pi(\pi(\alpha_o))) = \pi(\pi(0)) = \pi(\alpha_o) = 0$$

ΘΕΜΑ 4

α) Από εκφώνηση έχουμε ότι :

$$P(\beta) + P(-\beta) + 30P(0) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^3 - 4\beta^2 + \alpha\beta + \beta + 3 + (-\beta)^3 - 4(-\beta)^2 - \alpha\beta + \beta + 3 + 30 \cdot (\beta + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\beta^2 + 32(\beta + 3) > 0 \Rightarrow -\beta^2 + 4(\beta + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\beta^2 + 4\beta + 12 > 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\beta - 12 < 0$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } P(5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 5\alpha + \beta + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 125 - 100 + 5\alpha + \beta + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\alpha + \beta = -28 \Rightarrow \beta = -5\alpha - 28$$

$$\text{Επίσης } \beta^2 - 4\beta - 12 < 0$$

$$\text{Το τριώνυμο } \beta^2 - 4\beta - 12 \text{ έχει } \Delta = 64 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα έχουμε } \beta^2 - 4\beta - 12 \leq 0 \Rightarrow (\beta + 2)(\beta - 6) \leq 0 \Rightarrow \beta \in (-2, 6)$$

Όμως οι α, β είναι ακέραιοι, άρα πιθανές ευλογίες μόνο οι :

$$\beta = -2, \beta = -1, \beta = 0, \beta = 1, \beta = 2, \beta = 3, \beta = 4, \beta = 5, \beta = 6$$

$$\text{Και επειδή πρέπει να ικανοποιείται και η εξίσωση } \beta = -5\alpha - 28 \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - 28}{5}$$

$$\text{Δεκτή η } \beta = 3 \text{ (και τότε } \alpha = -5)$$