

ΘΕΜΑ 1

α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

Λύνουμε το παρακάτω σύστημα, με αγνώστους τα α και β :

$$\begin{cases} P(1) = Q(1) \\ P(2) = Q(2) - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + 4 = 1^2 + 1 + \beta \\ 2^3 + \alpha \cdot 2^2 + 4 = 2^2 + 2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + 4 = 1 + 1 + \beta \\ 8 + 4\alpha + 4 = 4 + 2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ 4\alpha - \beta = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ 4(\beta - 3) - \beta = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ 4\beta - 12 - \beta = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ 3\beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Εκτελούμε την διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + \alpha x + \beta & x^2 + x + 1 \\ -2x^3 - 2x^2 - 2x & 2x + 1 \\ \hline x^2 + (\alpha - 2)x + \beta & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \hline (\alpha - 3)x + \beta - 1 & \end{array}$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $x + 1$, άρα:

$$x + 1 = (\alpha - 3)x + \beta - 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 1 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

β) Για $\alpha = 4, \beta = 2$, το $P(x)$ γράφεται ως: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

Λύνουμε τις δύο ανισώσεις ξεχωριστά:

Από την διαίρεση που κάναμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει η ταυτότητα

$$\text{διαίρεσης: } P(x) = (x^2 + x + 1)(2x + 1) + (x + 1)$$

$$\text{Άρα έχουμε: } P(x) \geq x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(2x + 1) + x + 1 \geq x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(2x + 1) \geq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = 1 - 4 < 0$, άρα είναι πάντα θετικό

Αρκεί λοιπόν να βρούμε για ποια x είναι θετική ή μηδέν, η δεύτερη παρένθεση:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε: } P(x) \geq 7x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(2x + 1) + x + 1 \geq 7x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(2x + 1) - 6x - 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1)(2x + 1) - 3(2x + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1 - 3)(2x + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + x - 2)(2x + 1) \geq 0$$

Βρίσκουμε ξεχωριστά τα πρόσημα των δύο παρενθέσεων

Το $x^2 + x - 2$ έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\nearrow^{-2}$ $\searrow_1$

Τα πρόσημα του $x^2 + x - 2$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+

Τα πρόσημα του $2x + 1$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα

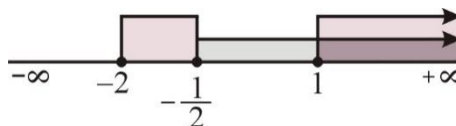
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+

Τα πρόσημα του γινομένου βρίσκονται με την βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-		0	+	
$2x+1$	-		-	0	+	+	
Γινόμενο	-	0	+	0	-	0	+

Αρα η δεύτερη ανίσωση αληθεύει για $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

Για να βρούμε που συναληθεύουν οι δύο ανισώσεις χρησιμοποιούμε το διπλανό σχήμα



Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \lambda)^2$

Αρα το $P(x)$ διαιρείται με το $(x - \lambda)$, και το πηλίκο της διαίρεσης αυτής διαιρείται με το $(x - \lambda)$

Σχήμα Horner :

1	0	α	β	λ
	λ	λ^2	$\alpha\lambda + \lambda^3$	
1	λ	$\alpha + \lambda^2$	$\alpha\lambda + \lambda^3 + \beta$	

$$\text{Θα είναι } \alpha\lambda + \lambda^3 + \beta = 0 \quad (1)$$

Το $\pi(x) = x^2 + \lambda x + \alpha + \lambda^2$ διαιρείται επίσης με το $(x - \lambda)$

	1	λ	$\alpha + \lambda^2$	λ
Σχήμα Horner :		λ	$2\lambda^2$	
	1	2λ	$\alpha + 3\lambda$	

$$\text{Θα είναι } \alpha + 3\lambda^2 = 0 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε :

$$\begin{cases} \alpha + 3\lambda^2 = 0 \\ \alpha\lambda + \lambda^3 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3\lambda^2 \\ -3\lambda^3 + \lambda^3 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3\lambda^2 \\ \beta = 2\lambda^3 \end{cases}$$

Επομένως έχουμε :

$$\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{(-3\lambda^2)^3}{27} + \frac{(2\lambda^3)^2}{4} = \frac{-27\lambda^6}{27} + \frac{4\lambda^6}{4} = -\lambda^6 + \lambda^6 = 0$$