

ΘΕΜΑ 1

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

Αρχικά παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Πιθανές ρίζες : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Η $x = 1$ είναι ρίζα, αφού $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ x-1 & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

Βρίσκουμε τα πρόσημα κάθε παρένθεσης ξεχωριστά

Το $x-1$ μηδενίζεται όταν $x=1$, είναι

αρνητικό όταν $x < 1$ και θετικό όταν $x > 1$

Τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	0	+

Το $x^2 - x - 6$ έχει $\Delta = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -2 \end{matrix}$

Τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

X	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
x^2-x-6	+	0	-	0	+

Το πρόσημο του γινομένου

$P(x)$ βρίσκεται με την βοήθεια

του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
x-3	-	-	-	0	+
$x^2 - x - 6$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

Με βάση τον πίνακα, έχουμε ότι $P(x) \leq 0$ όταν $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 3]$

ΘΕΜΑ 3

α) Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι :

$$\begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ P(-2) = 48 - P(2) \end{cases}$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τους αριθμούς $P(2)$ και $P(-2)$:

$$\begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ P(-2) = 48 - P(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ P(-2) = 48 - (P(-2) - 52) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ P(-2) = 48 - P(-2) + 52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ 2P(-2) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = P(-2) - 52 \\ P(-2) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = -2 \\ P(-2) = 50 \end{cases}$$

β) Μπορούμε τώρα να λύσουμε το παρακάτω σύστημα, με αγνώστους τα α και β

$$\begin{cases} P(2) = -2 \\ P(-2) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta = -2 \\ 2(-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + \alpha(-2) + \beta = 50 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha + \beta = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 2\alpha \\ -2\alpha + 2 - 2\alpha = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 2\alpha \\ 4\alpha = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Πιθανές ρίζες του $P(x)$ είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Άρα όλοι οι όροι του γινομένου $P(3) \cdot P(-3) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7)$ είναι διάφοροι του μηδενός, επομένως $P(3) \cdot P(-3) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0$

ΘΕΜΑ 4

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(1) = 2$ και $P(4) = -1$

Στη σχέση $P(x+1) + 2P(4-x) = x$

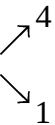
- Για $x = 0$: $P(1) + 2P(4) = 0$ (1)
- Για $x = 3$: $P(4) + 2P(1) = 3$ (2)

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) με άγνωστους τους αριθμούς $P(1), P(4)$:

$$\begin{cases} P(1) + 2P(4) = 0 \\ P(4) + 2P(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) = -2P(4) \\ P(4) + 2(-2P(4)) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = -2P(4) \\ -3P(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) = 2 \\ P(4) = -1 \end{cases}$$

β) Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^2 - 5x + 4$:

Το τριώνυμο έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ 

Άρα $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$

Γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 5x + 4$:

$P(x) = (x^2 - 5x + 4)\pi(x) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha x + \beta = \cup(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης

Παραπάνω αποδείξαμε ότι $P(1) = 2$ και $P(4) = -1$

Άρα έχουμε:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(4) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$