

ΘΕΜΑ 1

α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow (\alpha + \beta)x^3 + (\beta + \gamma)x^2 + 2\beta + 3 = (\gamma - 2)x^3 + 2x^2 + \beta + 2$$

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και έχουμε :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma - 2 \\ \beta + \gamma = 2 \\ 2\beta + 3 = \beta + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = \gamma - 2 \\ -1 + \gamma = 2 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \gamma = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Λύνουμε το παρακάτω σύστημα :

$$\begin{cases} P(0) = -3 \\ P(2) = 1 \\ P(1) = P(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = -3 \\ \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma = 1 \\ \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = -3 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = \alpha - \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -3 \\ 4\alpha + 2\beta - 3 = 1 \\ \beta = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -3 \\ 4\alpha = 4 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -3 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

β) Για $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -3$ το $P(x)$ γράφεται : $P(x) = x^2 - 3$

Άρα έχουμε :

$$\begin{aligned} [P(x) + x][P(x) + x + 4] &= -3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 - 3 + x)(x^2 - 3 + x + 4) &= -3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 + x + 1) &= -3 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 &= -3 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(x^3 + 2x^2 - x - 2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Για την δεύτερη εξίσωση, προφανής ρίζα το 1

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & 1 & 3 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \xRightarrow{\Delta = 1} x = -2 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \xrightarrow{-1} -1$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι : $x = 0, x = 1, x = -2$ και $x = -1$

ΘΕΜΑ 4

α) Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - \alpha + \beta$ δίνει υπόλοιπο $\beta\gamma + \alpha\gamma$, άρα :

$$P(\alpha - \beta) = \beta\gamma + \alpha\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 + \gamma(\alpha - \beta) + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma + \alpha\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma + \alpha\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta \text{ και } \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

β) Αφού : $\alpha = \beta = \gamma$ το $P(x)$ γράφεται ως εξής : $P(x) = x^2 + \alpha x + 2\alpha^2$

Για να δείξουμε ότι το $Q(x) = xP(x) - 4\alpha^3$ έχει παράγοντα το $x - \alpha$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$Q(\alpha) = 0$$

Πράγματι έχουμε :

$$Q(\alpha) = \alpha P(\alpha) - 4\alpha^3 = \alpha(\alpha^2 + \alpha \cdot \alpha + 2\alpha^2) - 4\alpha^3 = \alpha^3 + \alpha^3 + 2\alpha^3 - 4\alpha^3 = 4\alpha^3 - 4\alpha^3 = 0$$

Άρα το $Q(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \alpha)$

$$\gamma) \quad Q(x) = xP(x) - 4\alpha^3 = x(x^2 + \alpha x + 2\alpha^2) - 4\alpha^3 = x^3 + \alpha x^2 + 2\alpha^2 x - 4\alpha^3$$

Αποδείξαμε ότι : $Q(\alpha) = 0$, άρα το α είναι ρίζα

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & \alpha & 2\alpha^2 & -4\alpha^3 \\ \alpha & & \alpha & 2\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ \hline & 1 & 2\alpha & 4\alpha^2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } Q(x) = (x - \alpha)(x^2 + 2\alpha x + 4\alpha^2)$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2\alpha x + 4\alpha^2$ έχει $\Delta = 4\alpha^2 - 16\alpha^2 < 0$ άρα δεν παραγοντοποιείται

Οπότε η παραγοντοποίηση του $Q(x)$ είναι $Q(x) = (x - \alpha)(x^2 + 2\alpha x + 4\alpha^2)$