

ΘΕΜΑ 1

α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

$$\sqrt{x+1}+1=x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1$$

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και έχουμε :

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Η τιμή $x = 0$ απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τον περιορισμό.

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x = 3$

Για $x = 3$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{3+1}+1=3 \Rightarrow 2+1=3$ που ισχύει ,
οπότε η ρίζα $x = 3$ γίνεται δεκτή

ΘΕΜΑ 3

α) Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$, άρα $P(-1) = 0$

$$\text{Οπότε } P(-1) = 0 \Rightarrow Q(-1+2) + (-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0 \Rightarrow Q(1) + 1 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow Q(1) = 2$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι 10 . Άρα

$$P(1) = 10 \Rightarrow Q(1+2) + 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 10 \Rightarrow Q(3) + 1 + 2 - 1 = 10 \Rightarrow Q(3) = 8$$

$$\beta) \text{ i) } \begin{cases} Q(1) = 2 \\ Q(3) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^2 + \alpha + \beta = 2 \\ 3^2 + 3\alpha + \beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

ii) Υπολογίζουμε αρχικά το $Q(x+2)$:

$$Q(x+2) = (x+2)^2 - (x+2) + 2 = x^2 + 4x + 4 - x - 2 + 2 = x^2 + 3x + 4$$

Άρα

$$P(x) = Q(x+2) + x^2 + 2x - 1 \Rightarrow P(x) = x^2 + 3x + 4 + x^2 + 2x - 1 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

ΘΕΜΑ 4

Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι $P(\alpha) = P(\beta) = \upsilon$

Η ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι :

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\pi(x) + \kappa x + \lambda \quad \text{όπου} \quad \upsilon(x) = \kappa x + \lambda \quad \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης}$$

Έχουμε ότι :

$$\begin{cases} P(\alpha) = \upsilon \\ P(\beta) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa\alpha + \lambda = \upsilon \\ \kappa\beta + \lambda = \upsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa\alpha + \lambda = \kappa\beta + \lambda \\ \kappa\beta + \lambda = \upsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa(\alpha - \beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta \\ \kappa\beta + \lambda = \upsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \lambda = \upsilon \end{cases}$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι :

$$\upsilon(x) = 0 \cdot \kappa + \lambda = \lambda = \upsilon = P(\alpha) = P(\beta)$$

