

ΘΕΜΑ 1

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2

Το $P(x)$ έχει παράγοντα το :

$$x-1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow 1^3+2 \cdot 1^2+\alpha \cdot 1+\beta=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-3 \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι :

$$P(2)=8 \Rightarrow 2^3+2 \cdot 2^2+2\alpha+\beta=8 \Rightarrow 2\alpha+\beta=-8 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ 2\alpha+\beta=-8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-3-\beta \\ 2(-3-\beta)+\beta=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-3-\beta \\ -6-2\beta+\beta=-8 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-3-\beta \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-5 \\ \beta=2 \end{cases} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης :

$$P(x)=\pi(x)(x^2-9)+2x-1$$

• Για $x=3$:

$$P(3)=\pi(3)(3^2-9)+2 \cdot 3-1 \Rightarrow 2 \cdot 3^3+3^2+3 \cdot \alpha+\beta=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha+\beta=-58 \quad (1)$$

• Για $x=-3$:

$$P(-3)=\pi(-3)((-3)^2-9)+2 \cdot (-3)-1 \Rightarrow 2 \cdot (-3)^3+(-3)^2-3 \cdot \alpha+\beta=-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\alpha+\beta=38 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2) :

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta=-58 \\ -3\alpha+\beta=38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha+\beta=-58 \\ \beta=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-16 \\ \beta=-10 \end{cases}$$

$$(+)\ 2\beta=-20$$

$$\Rightarrow \beta=-10$$

β) Το $P(x)$ γράφεται ως : $P(x)=2x^3+x^2-16x-10$

$$P(x) \geq 2x-1 \Rightarrow 2x^3+x^2-16x-10 \geq 2x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3+x^2-18x-9 \geq 0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $2x^3+x^2-18x-9$ είναι οι $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

Σχήμα Horner :

2	1	-18	-9	3
	6	21	9	
2	7	3	0	

$$\text{Άρα } 2x^3 + x^2 - 18x - 9 = (x-3)(2x^2 + 7x + 3)$$

$$\text{Και } 2x^2 + 7x + 3 \stackrel{\Delta=25}{=} \frac{-7 \pm 5}{4} \begin{matrix} \nearrow^{-3} \\ \searrow^{-\frac{1}{2}} \end{matrix}$$

$$\text{Επομένως } 2x^3 + x^2 - 18x - 9 = (x-3)(x+3)(2x+1)$$

$$\text{Άρα η ανίσωση γράφεται : } (x+3)(x-3)(2x+1) \geq 0$$

Βρίσκουμε τα πρόσημα κάθε παρένθεσης ξεχωριστά όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x-3	-	0	+

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
x+3	-	0	+

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
2x+1	-	0	+

Το πρόσημο του γινομένου βρίσκεται με την βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
x+3	-	0	+	+	+
x-3	-	0	-	0	+
2x+1	+	+	0	-	-
Γινόμενο	+	0	-	0	-

$$\text{Άρα η ανίσωση ισχύει όταν } x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Αρχικά παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές αλλά οι παρονομαστές είναι ήδη παραγοντοποιημένοι, άρα δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια παραγοντοποίηση

Περιορισμοί

$$\text{Πρέπει : } (x-1)(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq 2$$

$$(x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq 3$$

$$(x-3)(x-4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \text{ και } x \neq 4$$

$$x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

Τώρα

1^{ος} τρόπος

$$\text{Παρατηρούμε ότι } 1 = (x-1) - (x-2) = (x-2) - (x-3) = (x-3) - (x-4)$$

Οπότε

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{(x-2) - (x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{(x-3) - (x-4)}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} - \frac{\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} + \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} - \frac{\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} +$$

$$+ \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-4)} - \frac{\cancel{(x-4)}}{(x-3)\cancel{(x-4)}} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow \frac{x-1-x+4}{(x-4)(x-1)} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(x-4)(x-1)} = \frac{6}{x+3} \Rightarrow 2(x-4)(x-1) = x+3 \Rightarrow 2(x^2 - x - 4x + 4) = x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \quad \Delta = 121 - 40 = 81, \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{11+9}{4} = 5 \\ x_2 = \frac{11-9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{δεκτές}$$

2ος τρόπος

Θα κάνουμε απολοιφή των παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών το οποίο είναι :

$$\text{ΕΚΠ} = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x+3)$$

και η αρχική εξίσωση γίνεται

$$(x-3)(x-4)(x+3) + (x-1)(x-4)(x+3) + (x-1)(x-2)(x+3) = 6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)[(x-3)(x-4) + (x-1)(x-4) + (x-1)(x-2)] = 6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)(x^2 - 4x - 3x + 13 + x^2 - 4x - x + 4 + x^2 - 2x - x + 2) = 6[x^2 - x - 2x + 2][x^2 - 3x - 4x + 12] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)(3x^2 - 15x + 18) = 6(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 15x^2 + 18x + 9x^2 - 45x + 54 = 6(x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 3x^3 + 21x^2 - 36x + 2x^2 - 14x + 24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 6x^2 - 2x + 54 = 6(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 6x^2 - 27x + 54 = 6x^4 - 60x^3 + 210x^2 - 300x + 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 2x^4 - 20x^3 + 70x^2 - 100x + 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 91x + 30 = 0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -21 & 72 & -91 & 30 \\ & & 6 & -45 & 81 & -30 \\ \hline & 2 & -15 & 27 & -10 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } 2x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 91x + 30 = (x-3)(2x^3 - 15x^2 + 27x - 10)$$

$$\text{Σχήμα Horner για την παρένθεση : } \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -15 & 27 & -10 \\ & & 10 & -25 & 10 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

Άρα

$$2x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 91x + 30 = (x-3)(x-5)(2x^2 - 5x + 2) \quad \Delta = 9 \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow (x-2)(x-5)(2x-1)(x-2)$$

Άρα η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $(x-3)(x-5)(2x-1)(x-2) = 0$

με τους περιορισμούς που αναφέραμε.

Άρα λύσεις της είναι οι $x = \frac{1}{2}$ και $x = 5$