

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

B. Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$.

Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

παίρνουμε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΘΕΜΑ 2

$$\begin{array}{r|l} \alpha) & x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \\ & \underline{-x^4 \quad -x^2} \\ & x^3 - 2x^2 + x - \\ & \underline{-x^3 \quad -x} \\ & -2x^2 - 2 \\ & \underline{2x^2 + 2} \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 \end{array}$$

Άρα η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + 1$ είναι :

$$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x - 2)$$

$$\beta) \quad x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow^{-2} \\ \searrow_1 \end{array}$$

αδύνατη

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = -2$ και $x = 1$

ΘΕΜΑ 3

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(0) = -1$

Όμως

$$\begin{aligned} P(0) &= 0(0-3)^{2015} - 2(0-1)^{2001} + 0^{17} - 2 \cdot 0^{16} + 1 = \\ &= 0 - 2 \cdot (-1)^{2001} + 1 = -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(2) = -3$

Όμως

$$\begin{aligned}
 P(2) &= 2(2-3)^{2015} - 2(2-1)^{2001} + 2^{17} - 2 \cdot 2^{16} + 1 = \\
 &= 2 \cdot (-1)^{2015} - 2 \cdot 1^{2001} + 2^{17} - 2^{17} + 1 = -2 - 2 + 1 = -3
 \end{aligned}$$

γ) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 2x$ είναι $v(x) = \alpha x + \beta$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $P(x) = (x^2 - 2x)\pi(x) + \alpha x + \beta$

• Για $x = 0$:

$$P(0) = (0^2 - 2 \cdot 0)\pi(0) + \alpha \cdot 0 + \beta \Rightarrow -1 = \beta$$

• Για $x = 2$:

$$P(2) = (2^2 - 2 \cdot 2)\pi(2) + 2\alpha + \beta \Rightarrow -3 = 2\alpha + \beta \stackrel{\beta=-1}{\Rightarrow} \alpha = -1$$

$$\text{Άρα } v(x) = -x - 1$$

ΘΕΜΑ 4

α) Αφού τα δύο πολυώνυμα είναι ίσα , θα είναι : $P(0) = Q(0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{14} \cdot 0^{14} + \alpha_{13} \cdot 0^{13} + \dots + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 = (0^2 - 1)^7 + (0^2 - 0 - 1)^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = (-1)^7 + (-1)^7 \Rightarrow \alpha_0 = -1 - 1 \Rightarrow \alpha_0 = -2$$

β) Το άθροισμα των συντελεστών $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{12} + \alpha_{14}$ είναι :

$$\begin{aligned}
 \frac{P(1) + P(-1)}{2} - \alpha_0 &= \frac{\alpha_{14} \cdot 1^{14} + \alpha_{13} \cdot 1^{13} + \dots + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_0 + \alpha_{14} \cdot (-1)^{14} + \dots + \alpha_0}{2} = \\
 &= \frac{2 \cdot \alpha_{14} + 2 \cdot \alpha_{12} + \dots + 2\alpha_0 - 2\alpha_0}{2} = \alpha_{14} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_2
 \end{aligned}$$

Όμως τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα , άρα :

$$P(1) = Q(1) = (1^2 - 1)^7 + (1^2 - 1 - 1)^7 = (-1)^7 = -1$$

$$P(-1) = Q(-1) = ((-1)^2 - 1)^7 + ((-1)^2 - (-1) - 1)^7 = 1^7 = 1$$

$$\text{Άρα : } \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{14} = \frac{P(1) + P(-1)}{2} - \alpha_0 = \frac{-1 + 1}{2} - (-2) = 2$$