

ΘΕΜΑ 1

α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ 2

Πιθανές ρίζες είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι ρίζα, αφού $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$

Οπότε παραγοντοποιούμε το $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ με σχήμα Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & 1 & -1 & -6 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Άρα: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ ή $x^2 - x - 6 = 0 \xRightarrow{\Delta=25} x = 3$ ή $x = -2$
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

ΘΕΜΑ 3

α) Έστω ρ η πάνω δεξιά τιμή του σχήματος Horner

Τότε είναι:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & \alpha & \beta \\ & \rho & \rho^2 - 2\rho & \rho^3 - 2\rho^2 + \alpha\rho & \\ \hline 1 & \rho - 2 & \rho^2 - 2\rho + \alpha & \rho^3 - 2\rho^2 + \alpha\rho + \beta = P(\rho) & \end{array}$$

Συγκρίνοντας με το σχήμα που δίνεται, συμπεραίνουμε ότι:

1) $\rho - 2 = 1 \Rightarrow \rho = 3$

2) $\rho^2 - 2\rho + \alpha = -2 \xRightarrow{\rho=3} 3^2 - 2 \cdot 3 + \alpha = -2 \Rightarrow 9 - 6 + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1$

3) $\rho^3 - 2\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 4 \xRightarrow{\rho=3} 3^3 - 2 \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3 + \beta = 4 \Rightarrow 27 - 18 - 3 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = -2$

Άρα το σχήμα Horner συμπληρωμένο είναι:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & -2 \\ & 3 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $P(x) = (x-3)(x^2 + x - 2) + 4$

β) Έχουμε: $P(x) \geq 4 \Rightarrow (x-3)(x^2 + x - 2) + 4 \geq 4 \Rightarrow (x-3)(x^2 + x - 2) \geq 0$

Αρχικά θα βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά. Έτσι:

Το $x-3$ μηδενίζεται όταν $x = 3$, είναι αρνητικό όταν $x < 3$ και θετικό όταν $x > 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x-3	-	0	+

Το $x^2 + x - 2$ έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

Τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	+	0	-	+

Το πρόσημο του γινομένου
βρίσκεται με την βοήθεια του
διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$x-3$	-		-		-		+
x^2+x-2	+		-		+		+
γινόμενο	-		+		-		+

$$\text{Άρα } (x-3)(x^2+x-2) \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 1] \cup [3, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι :

$$P(x) = \pi(x)(x^2 - 9) + \upsilon(x)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 9$ θα είναι πολώνυμο βαθμού
μικρότερου του διαιρέτη . Έστω λοιπόν ότι $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$

$$\text{Άρα : } P(x) = \pi(x)(x^2 - 9) + \alpha x + \beta$$

- Για $x = 3$

$$P(3) = \pi(3)(3^2 - 9) + 3\alpha + \beta \Rightarrow 3\alpha + \beta = P(3) \quad (1)$$

- Για $x = -3$

$$P(-3) = \pi(-3)((-3)^2 - 9) + (-3)\alpha + \beta \Rightarrow -3\alpha + \beta = P(-3) \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) :

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = P(3) \\ -3\alpha + \beta = P(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{P(3) + P(-3)}{2} \\ \alpha = \frac{P(3) - P(-3)}{6} \end{cases}$$

$$(+)\ 2\beta = P(3) + P(-3)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{P(3) + P(-3)}{2}$$

$$\text{Άρα } \upsilon(x) = \frac{P(3) - P(-3)}{6}x + \frac{P(3) + P(-3)}{2}$$