

23.3 1)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x) : (x^2 - x + 1)$ και έχουμε

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta \\
 \underline{-(x^4 + x^3 - x^2)} \\
 (\alpha - 1)x^2 + 2x + \beta \\
 \underline{-(\alpha - 1)x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha + 1} \\
 (\alpha + 1)x + \beta - \alpha + 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 - x + 1 \\
 x^2 + (\alpha - 1)
 \end{array} \right.$$

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $(\alpha + 1)x + \beta - \alpha + 1$. Οπότε πρέπει

$$(\alpha + 1)x + \beta - \alpha + 1 = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 3 \\ \beta - \alpha + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 2 + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

23.3 2)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x) : x^2 + 1$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^3 + 3x^2 + \alpha x + \beta \\
 \underline{-(x^4 - x^2)} \\
 x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta \\
 \underline{-(x^3 - x)} \\
 2x^2 + (\alpha - 1)x + \beta \\
 \underline{-(2x^2 - 2)} \\
 (\alpha - 1)x + \beta - 2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 + 1 \\
 x^2 + x + 2
 \end{array} \right.$$

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $(\alpha - 1)x + \beta - 2$

$$\text{Οπότε πρέπει : } (\alpha - 1)x + \beta - 2 = 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 4 \\ \beta - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

23.3 3)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x) : (x^2 + x + 1)$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2x^3 + 5x^2 + \alpha x + \beta \\
 \underline{-(x^4 + x^3 + x^2)} \\
 x^3 + 4x^2 + \alpha x + \beta \\
 \underline{-(x^3 + x^2 + x)} \\
 3x^2 + (\alpha - 1)x + \beta \\
 \underline{-(3x^2 + 3x + 3)} \\
 (\alpha - 4)x + \beta - 3
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 + x + 1 \\
 x^2 + x + 3
 \end{array} \right.$$

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $(\alpha - 4)x + \beta - 3$

$$\text{Οπότε πρέπει : } (\alpha - 4)x + \beta - 3 = -2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 4 = -2 \\ \beta - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

23.3 4)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x):(x+1)^2$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + \alpha x^2 + 4x + \beta \\ -x^4 - 2x^3 - x^2 \\ \hline x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 4x + \beta \\ -x^3 - 2x^2 - x \\ \hline (\alpha - 3)x^2 + 3x + \beta \\ -(\alpha - 3)x^2 - 2(\alpha - 3)x - \alpha + 3 \\ \hline (9 - 2\alpha)x + \beta - \alpha + 3 \end{array}$$

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $(9 - 2\alpha)x + \beta - \alpha + 3$

$$\text{Οπότε πρέπει : } (9 - 2\alpha)x + \beta - \alpha + 3 = x + 4 \Rightarrow \begin{cases} 9 - 2\alpha = 1 \\ \beta - \alpha + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

23.3 5)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x):x^2 - 1$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 4 \\ -x^4 \quad \quad + x^2 \\ \hline x^3 + (\alpha + 1)x^2 + \beta x - 4 \\ -x^3 \quad \quad + x \\ \hline (\alpha + 1)x^2 + (\beta + 1)x - 4 \\ -(\alpha + 1)x^2 \quad + (\alpha + 1) \\ \hline (\beta + 1)x + \alpha - 3 \end{array}$$

Βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $(\beta + 1)x + \alpha - 3$

$$\text{Οπότε πρέπει : } (\beta + 1)x + \alpha - 3 = 2x - 5 \Rightarrow \begin{cases} \beta + 1 = 2 \\ \alpha - 3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

23.3 6)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x):(x-3)^2$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r} x^3 + \alpha x^2 + 3x + \beta \\ -x^3 + 6x^2 - 9x \\ \hline (\alpha + 6)x^2 - 6x + \beta \\ -(\alpha + 6)x^2 + 6(\alpha + 6)x - 9(\alpha + 6) \\ \hline (6\alpha + 30)x + \beta - 9\alpha - 54 \end{array}$$

Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 6x + 9$, η διαίρεση θα δίνει υπόλοιπο 0.

$$\text{Οπότε πρέπει : } (6\alpha + 30)x + \beta - 9\alpha - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + 30 = 0 \\ \beta - 9\alpha - 54 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 9 \end{cases}$$

23.3 7)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x):(x+1)^2$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r}
 x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 \\ x + \alpha - 2 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 - 2x^2 - x} \\
 (\alpha - 2)x^2 + (\beta - 1)x - 3 \\
 \underline{-(\alpha - 2)x^2 - 2(\alpha - 2)x - \alpha + 2} \\
 (\beta - 2\alpha + 3)x - 3 - \alpha + 2
 \end{array}$$

Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 + 2x + 1$, η διαίρεση θα δίνει υπόλοιπο 0.

$$\text{Οπότε πρέπει : } (\beta - 2\alpha + 3)x - 3 - \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta - 2\alpha + 3 = 0 \\ -\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -5 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

23.3 8)

Κάνουμε την διαίρεση $P(x) : (x - 2)^2$ και έχουμε :

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3\alpha x^2 + (\alpha - \beta)x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 \\ x + (4 - 3\alpha) \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 + 4x^2 - 4x} \\
 (4 - 3\alpha)x^2 + (\alpha - \beta - 4)x + 4 \\
 \underline{-(4 - 3\alpha)x^2 + 4(4 - 3\alpha)x - 4(4 - 3\alpha)} \\
 (-11\alpha - \beta + 12)x + 12\alpha - 12
 \end{array}$$

Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4x + 4$, η διαίρεση θα δίνει υπόλοιπο 0.

$$\text{Οπότε πρέπει : } (-11\alpha - \beta + 12)x + 12\alpha - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -11\alpha - \beta + 12 = 0 \\ 12\alpha - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$