

22.9 1)

- α) Η ανίσωση ορίζεται όταν $\begin{cases} 2x-8 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 8 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -3 \end{cases}$. Οι ανισώσεις αυτές

συναληθεύουν για $x \geq 4$. Με τον περιορισμό αυτό (και επειδή τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι θετικά οπότε μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο) έχουμε

$$\sqrt{2x-8} < \sqrt{x+3} \Rightarrow \sqrt{2x-8}^2 < \sqrt{x+3}^2 \Rightarrow 2x-8 < x+3 \Rightarrow x < 11$$

Από τις παραπάνω λύσεις κρατάμε μόνο αυτές που ικανοποιούν τον περιορισμό. Οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$ με $4 \leq x < 11$

- β) Η ανίσωση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Με τον περιορισμό αυτό (και επειδή τα δύο μέλη της ανίσωσης δεν ξέρουμε αν είναι θετικά οπότε δεν μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο) διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- i) Αν $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$ η ανίσωση είναι αδύνατη (διότι $\sqrt{x-1} \geq 0$ και $x-3 < 0$ άρα αποκλείεται $\sqrt{x-1} < x-3$)

- ii) Αν $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ τότε τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι θετικά ή μηδέν οπότε

$$\sqrt{x-1} < x-3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 < (x-3)^2 \Leftrightarrow x-1 < x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+10 < 0 \quad \begin{matrix} \Delta=9 \\ x_1=2, x_2=5 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$x < 2 \text{ ή } x > 5$$

Από τις παραπάνω λύσεις κρατάμε μόνο αυτές που ικανοποιούν τους περιορισμούς $x \geq 1$ και $x \geq 3$ οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$ με $x > 5$

- γ) Η ανίσωση ορίζεται όταν $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$. Με τον περιορισμό αυτό (και επειδή τα δύο μέλη της ανίσωσης δεν ξέρουμε αν είναι θετικά οπότε δεν μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο) διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- i) Αν $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$ (ουσιαστικά λόγω περιορισμού $-3 \leq x < -1$ η ανίσωση ισχύει (διότι $\sqrt{x+3} \geq 0$ και $x+1 < 0$ οπότε σίγουρα $\sqrt{x+3} > x+1$). Άρα καταρχήν η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $-3 \leq x < -1$

- ii) Αν $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ τότε τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι θετικά ή μηδέν οπότε

$$\sqrt{x+3} > x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow x+3 > x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2 < 0 \quad \begin{matrix} \Delta=9 \\ x_1=-2, x_2=1 \end{matrix} \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

Από τις παραπάνω λύσεις κρατάμε μόνο αυτές που ικανοποιούν τους περιορισμούς $x \geq -3$ και $x \geq -1$ οπότε κρατάμε τα $x \in \mathbb{R}$ με $-1 \leq x < 1$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$ με $-3 \leq x < -1$ και τα $x \in \mathbb{R}$ με $-1 \leq x < 1$ δηλαδή τα $x \in \mathbb{R}$ με $-3 \leq x < 1$

22.9 2)

Η ανίσωση ορίζεται όταν $\begin{cases} 3x-9 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$

Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \geq 4$

Με τον περιορισμό αυτό (και επειδή τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι θετικά , μπορούμε

Να υψώσουμε στο τετράγωνο), έχουμε :

$$\sqrt{3x-9} > \sqrt{x-4} \Rightarrow \sqrt{3x-9}^2 > \sqrt{x-4}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-9 > x-4 \Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

Από τις παραπάνω λύσεις κρατάμε μόνο αυτές που ικανοποιούν τον περιορισμό.

Οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq 4$

22.9 3)

$$\sqrt{1-x} \geq \sqrt{x+3}$$

Περιορισμοί : $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ και
 $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$$\Rightarrow 1-x \geq x+3 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, -3] \cap (-\infty, -1] = [-3, -1]$

22.9 4)

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{2-x} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-6} < \sqrt{2-x}$$

Περιορισμοί : $\left. \begin{array}{l} x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \text{ και} \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{array} \right\}$ αδύνατη αφού $(-\infty, 2] \cap [6, +\infty) = \emptyset$

22.9 5)

$$\sqrt{x-2} < x-4$$

Περιορισμοί : $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4$, $\sqrt{x-2} < 0$ αδύνατη

β) Για $x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$:

$$x-2 < (x-4)^2 \Rightarrow x-2 < x^2 - 8x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 > 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 6 \\ \searrow x_2 = 3 \end{array}$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	3	6	$+\infty$	
$x^2-9x+18$	+	0	-	0	+

Συναληθεύοντας με τους περιορισμούς έχουμε ότι η ανίσωση αληθεύει για $x \in (6, +\infty)$

22.9 6)

$$\sqrt{x+3} > x+1$$

Περιορισμοί : $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x+1 < 0 \Rightarrow -3 \leq x < -1$ η ανίσωση ισχύει εξ ορισμού
 αφού $\sqrt{x+3} \geq 0$ για κάθε $x \geq -3$

β) Για $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$:

$$x+3 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Πίνακας προσημίων :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	+	$\emptyset$	$\emptyset$	+

Και από πριν για $-3 \leq x < -1$ ισχύει εξ ορισμού .

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [-3, -1) \cup (-2, 1) = [-3, 1)$

22.9 7)

$$\sqrt{x-3} \geq x-5$$

Περιορισμοί : $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x-5 < 0$ η ανίσωση ισχύει εξ ορισμού
αφού $\sqrt{x-3} \geq 0$ για κάθε $x \geq 3$

β) Αν $x-5 \geq 0$:

$$\Rightarrow x-3 \geq x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-11x+28 \leq 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Πίνακας προσημίων :

x	$-\infty$	4	7	$+\infty$
$x^2-11x+28$	+	$\emptyset$	$\emptyset$	+

Και όπως είδαμε αρχικά αληθεύει για $x \in [3, 5)$ εξ ορισμού .

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [3, 5) \cup (4, 7) = [3, 7)$

22.9 8)

$$\sqrt{x+4} \leq x+7$$

Περιορισμοί : $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x+7 < 0 \Rightarrow x < -7$, η εξίσωση είναι αδύνατη

β) Αν $x+7 \geq 0$:

$$\Rightarrow x+4 \leq x^2+14x+49 \Rightarrow x^2+13x+45 \geq 0$$

$$\Delta = -11 < 0 \text{ άρα } x^2+13x+45 > 0 \text{ για κάθε } x$$

Άρα αρκεί μόνο ο αρχικώς περιορισμός για να αληθεύει η ανίσωση $x \geq -4$

22.9 9)

$$2\sqrt{x-2} < x-1$$

Περιορισμοί : $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, η εξίσωση είναι αδύνατη

β) Αν $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$:

$$4(x-2) < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 4x - 8 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow (x-3)^2 > 0 \text{ ισχύει για κάθε } x \neq 3$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [2, +\infty) \cap \mathbb{R} \neq \{3\} \Rightarrow x \in [2, 3) \cup (3, +\infty)$

22.9 10)

$$\sqrt{x^2 - 3x} \geq x - 3$$

Περιορισμοί : $x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$, η εξίσωση ισχύει εξ ορισμού αφού $\sqrt{x^2 - 3x} \geq 0$
για κάθε $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

β) Αν $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$:

$$x^2 - 3x \geq (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 3x \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \geq 9 \Rightarrow x \geq 3 \text{ ισχύει εξ υποθέσεως.}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

22.9 11)

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2} \geq 1$$

Περιορισμοί : $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$ και

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+5} \geq 1 + \sqrt{x+2} \Rightarrow x+5 \geq 1 + 2\sqrt{x+2} + x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+2} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} \leq 1 \Rightarrow x+2 \leq 1 \Rightarrow x \leq -1$$

Άρα η ανίσωση ισχύει για $x \in [-5, -2] \cap (-\infty, -1] = [-2, -1]$

22.9 12)

$$\sqrt{4-\sqrt{5-x}} - \sqrt{3-x} > 0$$

Περιορισμοί : $3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$ και

$$5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \text{ και}$$

$$4-\sqrt{5-x} \geq 0 \Rightarrow 16 \geq 5-x \Rightarrow x \geq -11$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{5-x}} > \sqrt{3-x} \Rightarrow 4-\sqrt{5-x} > 3-x \Rightarrow \sqrt{5-x} < 1+x$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $1+x \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$, η ανίσωση είναι αδύνατη

β) Αν $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$:

$$5-x < 1+2x+x^2 \Rightarrow x^2+3x-4 > 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+4) > 0$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-4		1	$+\infty$
x^2+3x-4	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για

$$x \in (-\infty, -4) \cap (1, +\infty) \cap [-11, 3] \cap (-1, +\infty) \Rightarrow x \in (1, 3]$$