

22.8 1)

Είναι $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ οπότε η ανίσωση γίνεται $\frac{x^2}{x - 4} + \frac{x}{x + 1} \geq \frac{9x - 10}{(x - 4)(x + 1)}$

Περιορισμοί $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ και $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x^2}{x - 4} + \frac{x}{x + 1} \geq \frac{9x - 10}{(x - 4)(x + 1)} \Leftrightarrow \frac{x^2(x + 1)}{(x - 4)(x + 1)} + \frac{x(x - 4)}{(x - 4)(x + 1)} - \frac{9x - 10}{(x - 4)(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x^2 - 4x - 9x + 10}{(x - 4)(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{(x - 4)(x + 1)} \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{παραγοντοποίηση Horner} \\ \text{ρίζα το } x=1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x - 10)(x^2 - 3x - 4) \geq 0$$

Το πρόσημο του $P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 10)(x^2 - 3x - 4)$ βρίσκεται με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	-5	-1	1	2	4	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2+3x-10$	+	0	-	-	0	+	+
x^2-3x-4	+	+	0	-	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \geq 0$ ισχύει όταν

22.8 2)

Περιορισμοί : $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$$x^2 - \frac{x - 2}{x + 3} \leq \frac{5x^2}{x + 3} \Rightarrow x^2 - \frac{x - 2}{x + 3} - \frac{5x^2}{x + 3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2(x + 3)}{x + 3} - \frac{x - 2}{x + 3} - \frac{5x^2}{x + 3} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - x + 2 - 5x^2}{x + 3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 3} \leq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $x^3 - 2x^2 - x + 2$, προφανώς η $x = 1$ είναι ρίζα

Σχήμα Horner :

1	-2	-1	2	1
1	-1	-2	0	

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

Άρα : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

Οπότε : $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 3} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}{x + 3} \leq 0$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	+	0	-	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+
P(x)	+	0	-	0	-	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-3, -1] \cup [1, 2]$

Περιορισμός : $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$$x^2 + x + 3 + \frac{5(x^2 + 1)}{x-3} \leq 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 + \frac{5(x^2 + 1)}{x-3} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x-3) + x(x-3) + 3(x-3) + 5(x^2 + 1)}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x + 3x - 9 + 5x^2 + 5}{x-3} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x-3} \leq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $x^3 + 3x^2 - 4$, η $x=1$ είναι ρίζα ,
αφού $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ & 1 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Άρα : $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$

Οπότε : $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2)^2}{x-3} \leq 0$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
P(x)	+	0	+	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [1, 3)$

Περιορισμός : $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

$$\frac{x^3 + 3x - 6}{x-4} + 2x > 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 3x - 6}{x-4} + \frac{2x(x-4)}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 3x - 6 + 2x^2 - 8x}{x-4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x-4} > 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, η $x=-1$ είναι ρίζα ,

αφού $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 1 - 1 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -5 & -6 & -1 \\ & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Άρα : $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$

$$\text{Οπότε : } \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 4} > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x^2 + x - 6)}{x - 4} > 0$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-3	-1	2	4	$+\infty$
x+1	-		-			+
x^2+x-6	+	0	-	-	0	+
x-4	-		-		-	0
P(x)	+	0	-	0	-	0

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (4, +\infty)$

22.8 5)

Περιορισμός : $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$$\frac{x^2}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{x^2 - x - 1}{x - 3} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2 - x - 1}{x - 3} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x-3) - x(x-3) + 2(x^2 - x - 1)}{2(x-3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x + 2x^2 - 2x - 2}{2(x-3)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{2(x-3)} \geq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $x^3 - 2x^2 + x - 2$, η $x = 2$ είναι ρίζα ,

$$\text{αφού } 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} 1 & -2 & 1 & -2 \\ & 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$$

$$\text{Οπότε : } \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{2(x-3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x^2+1)}{2(x-3)} \geq 0$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x-2$	-	0	+	+	
x^2+1	+	+	+	+	
$x-3$	-	-	0	+	
P(x)	+	0	-	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$

22.8 6)

Περιορισμοί :

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

$$x \neq 0 \text{ και}$$

$$x^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 3$$

$$2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} \leq \frac{7x^2-18}{x^2-3x} \Rightarrow 2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} - \frac{7x^2-18}{x^2-3x} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 \cdot x(x-3)}{x(x-3)} + \frac{5x^3}{x(x-3)} + \frac{6(x-3)}{x(x-3)} - \frac{7x^2-18}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^4-6x^3+5x^3+6x-18-7x^2+18}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^4-x^3-7x^2+6x}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(2x^3-x^2-7x+6)}{x(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^3-x^2-7x+6}{x-3} \leq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $2x^3-x^2-7x+6$, η $x=1$ είναι ρίζα ,
αφού $2 \cdot 1^3 - 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = -1 + 1 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & -7 & 6 & 1 \\ & 2 & 1 & -6 & \\ \hline 2 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Άρα : $2x^3-x^2-7x+6 = (x-1)(2x^2+x-6) = 2(x-1)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Οπότε : $\frac{2x^3-x^2-7x+6}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x-3} \leq 0$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$x-1$	-	-		0	+	+	+
$2x^2+x-6$	+	0	-		-	0	+
$x-3$	-	-		-	-	0	+
P(x)	+	0	-		-	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in [-2, 0) \cup (0, 1) \cup \left[\frac{3}{2}, 3\right)$

22.8 7)

Περιορισμοί : * $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ και

$$\Delta=1, x_{1,2}=\frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$x^2-3x+2 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \text{ και}$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} \geq \frac{x^2-5x+6}{x-1} \Rightarrow \frac{3x^2-6x+2}{x-2} - \frac{2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x^2-5x+6}{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3x^2-6x+2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-1)(x-2)} - \frac{(x^2-5x+6)(x-2)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x^3-6x^2+2x-3x^2+6x-2-2-x^3+5x^2-6x+2x^2-10x+12}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3-2x^2-8x+8}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : x^3-x^2-4x+4 , προφανώς η $x=1$ είναι ρίζα

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & 1 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2 - 4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

$$\text{Οπότε : } \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)} \cancel{(x-2)} (x+2)}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x-2)}} \geq 0 \stackrel{x \neq 1}{x \neq 2} \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{x \neq 1,2}{\Rightarrow} x \in [-2, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

22.8 8)

Περιορισμοί : *

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

και

$$\Delta=9, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = -2 \\ \searrow x_2 = 1 \end{array}$$

$$x^2 + x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 1$$

$$\frac{2x^2}{x+2} \leq \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x-2} \Rightarrow \frac{2x^2}{x+2} - \frac{3x}{x-1} + \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{3x(x+2)}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 2x^2 - 3x^2 - 6x + 2x + 3}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή : $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, προφανώς η $x = -1$ είναι ρίζα

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ & -2 & 7 & -3 & \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Delta=25$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = 3 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

$$\text{Οπότε : } \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$				
x+1	-		-	0	+		+				
$2x^2-7x+3$	+		+	+	0	-		-	0	+	
x+2	-	0		+	+		+	+		+	
x-1	-		-	-	-	0		+	+		
P(x)	-		+	0	-	0	+		-	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 2) \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 3]$