

22.7 1)

- α) **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Δεν μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με $x-3$ διότι δεν γνωρίζουμε αν το $x-3$ είναι θετικό ή αρνητικό οπότε δεν γνωρίζουμε αν θα αλλάξουμε ή αν θα διατηρήσουμε την φορά της ανίσωσης

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x-2}{x-3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-2x+6}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x+4)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+x-12 \geq 0. \text{ Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου } -x^2+x-12$$

Το $-x^2+x-12 \geq 0$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$. Οπότε τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
x^2-2x-3	-	0	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-2}{x-3} \geq 2$ ισχύει όταν $x \in (3, 4]$

β) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x+6}{x^2-3x-4} \leq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-4} - \frac{5x+6}{(x-4)(x+1)} \leq \frac{x}{x+1} \quad (1)$

Περιορισμοί: $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ και $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x(x+1)}{(x-4)(x+1)} - \frac{5x+6}{(x-4)(x+1)} - \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x-5x-6-x^2+4x}{(x-4)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+x-6)(x^2-6x+8) \leq 0$$

Το πρόσημο του

$$P(x) = (x^2+x-6)(x^2-6x+8)$$

βρίσκεται με την βοήθεια του διπλανού πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	-3	-1	2	4	$+\infty$
x^2+x-6	+	0	-	0	+	+
x^2-3x-4	+	+	0	-	0	+
P(x)	+	0	-	0	-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \leq 0$ ισχύει όταν $x \in [-3, -1] \cup [2, 4]$

22.7 2)

Περιορισμοί: $x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x-6}{x+4} < 3 \Rightarrow \frac{x-6}{x+4} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x-6-3(x+4)}{x+4} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-6-3x-12}{x+4} < 0 \Rightarrow \frac{-2x-18}{x+4} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2x-18)(x+4) < 0 \Rightarrow -2x^2-8x-18x-72 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2-26x-72 < 0 \Rightarrow -x^2-13x-36 < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2-13x-36$

Το $-x^2-13x-36$ έχει ρίζες $x_1 = -9$

και $x_2 = -4$

Οπότε τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-9	-4	$+\infty$
$-x^2-13x-36$	-	0	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-6}{x+4} < 3$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, -9) \cup (-4, +\infty)$

22.7 3)

Περιορισμοί: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x-5}{x-2} \geq 4 \Rightarrow \frac{x-5}{x-2} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x+3}{x-2} \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-3x+3)(x-2) \geq 0 \Rightarrow -3x^2+9x-6 \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $-3x^2+9x-6$

Το $-3x^2+9x-6$ έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=2$

Οπότε τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$-3x^2+9x-6$	-	0	+	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-5}{x-2} \geq 4$ ισχύει όταν $x \in (1, 2]$

22.7 4)

Περιορισμοί : $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{2x+1}{x-2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2+x-6 \leq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου x^2+x-6

Το x^2+x-6 έχει ρίζες $x_1=-3$ και $x_2=2$

Οπότε τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
x^2+x-6	+	0	-	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{2x+1}{x-2} \leq 1$ ισχύει όταν $x \in [-3, 2)$

22.7 5)

Περιορισμοί : $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x \geq \frac{x+8}{x-1} \Rightarrow x - \frac{x+8}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)-(x+8)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-2x-8)(x-1) \geq 0$$

Οπότε βρίσκουμε το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x) = (x^2-2x-8)(x-1)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
x^2-2x-8	+	0	-	0	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $x \geq \frac{x+8}{x-1}$ ισχύει όταν $x \in [-2, 1) \cup [4, +\infty)$

22.7 6)

Περιορισμοί : $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x-1}{x+1} + x \leq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} + x - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-1+x(x+1)-(x+1)}{x+1} \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow (x^2+x-2)(x+1) \leq 0$$

Οπότε βρίσκουμε το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x) = (x^2+x-2)(x+1)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$		
x^2+x-2	+	0	-	-	0	+	
$x+1$	-	-	0	+	+	+	
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-1}{x+1} + x \leq 1$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1]$

22.7 7)

Περιορισμοί : $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ και $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-3} \geq 2 \Rightarrow \frac{2x(x-3) - (x+1) - 2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-5x+10}{x^2-2x-3} \geq 0 \Rightarrow (-5x+10)(x^2-2x-3) \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $P(x) = (-5x+10)(x^2-2x-3)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$		
$-5x+10$	+	0	-	-	-		
x^2-2x-3	+	+	0	-	0	+	
P(x)	+	0	-	0	+	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-3} \geq 2$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, -2) \cup [2, 3)$

22.7 8)

Περιορισμοί : $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$ και $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{4}{x-5} - 1 < \frac{2}{x-2} \Rightarrow \frac{4}{x-5} - 1 - \frac{2}{x-2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+9x-8}{x^2-7x+10} < 0 \Rightarrow (-x^2+9x-8)(x^2-7x+10) < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $P(x) = (-x^2+9x-8)(x^2-7x+10)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	2	5	8	$+\infty$	
$-x^2+9x-8$	-	0	+	+	+	0	-
$x^2-7x+10$	+	+	0	-	0	+	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{4}{x-5} - 1 < \frac{2}{x-2}$ ισχύει όταν

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, 5) \cup (8, +\infty)$$

22.7 9)

Περιορισμοί : $x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ και $x^2+x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ και $x \neq 2$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{2}{x+3} \geq \frac{x-3}{x^2+x-6} \Rightarrow \frac{2}{x+3} - \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)-(x-3)}{(x+3)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-4-x+3}{(x+3)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x^2+x-6} \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-6)$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον
διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	-		-		+		+
x^2+x-6	+		-		-		+
$P(x)$	-		+		-		+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{2}{x+3} \geq \frac{x-3}{x^2+x-6}$ ισχύει όταν $x \in (-3, 1] \cup (2, +\infty)$

22.7 10)

Περιορισμοί: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ και $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
και $x^2-x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ και $x \neq 3$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x+2} \leq \frac{x-4}{x^2-x-6} \Rightarrow \frac{x}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{x-4}{x^2-x-6} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+2)+3(x-3)-(x-4)}{x^2-x-6} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+4x-5}{x^2-x-6} \leq 0 \Rightarrow (x^2+4x-5)(x^2-x-6) \leq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $P(x) = (x^2+4x-5)(x^2-x-6)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον
διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-5		-2		1		3	$+\infty$
x^2+4x+5	+		-		-		+		+
x^2-x-6	+		+		-		-		+
$P(x)$	+		-		+		-		+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x+2} \leq \frac{x-4}{x^2-x-6}$ ισχύει όταν

$$x \in [-5, -2) \cup [1, 3)$$

22.7 11)

Περιορισμοί: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ και $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

και $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x-1} > \frac{14}{1-x^2} \Rightarrow \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x-1} - \frac{14}{1-x^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1)-x(x+1)+14}{x^2-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+x+12}{x^2-1} > 0 \Rightarrow (-x^2+x+12)(x^2-1) > 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $P(x) = (-x^2+x+12)(x^2-1)$

τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον
διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3		-1		1		4	$+\infty$
$-x^2+x+12$	-		+		+		+		-
x^2-1	+		+		-		+		+
$P(x)$	-		+		-		+		-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x-1} > \frac{14}{1-x^2}$ ισχύει όταν $x \in (-3, -1) \cup (1, 4)$