

22.6 1)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$. Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι $\frac{(x^2 + x - 6)(1 - x)}{x - 5} \geq 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $(x^2 + x - 6)(1 - x)$ και $x - 5$ είναι ομόσημες** $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (x^2 + x - 6)(x - 1)(x - 5) \geq 0$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2 + x - 6)(x - 1)(x - 5)$. Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά. Έτσι

Το $x^2 + x - 6$ έχει $\Delta = 1 + 24 = 25$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ και $x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
x^2+x-6	+	0	-	0	+

Το $x - 5$ μηδενίζεται όταν $x = 5$, είναι αρνητικό όταν $x < 5$ και θετικό όταν $x > 5$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$x-5$	-	0	+

Το $1 - x$ μηδενίζεται όταν $x = 1$, είναι θετικό όταν $x < 1$ και αρνητικό όταν

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με την βοήθεια του διπλανού πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	-3		1		2		5	$+\infty$
x^2+x-6	+	0	-		-	0	+		+
$x-5$	-		-		-		-	0	+
$1-x$	+		+	0	-		-		-
P(x)	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η ανίσωση $P(x) \geq 0$ ισχύει όταν $x \in [-3, 1] \cup [2, 5)$

22.6 2)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
 Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 2} \leq 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $x^2 + 2x - 15$ και $x - 2$ είναι ετερόσημες** $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (x^2 + 2x - 15)(x - 2) \leq 0$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2 + 2x - 15)(x - 2)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά. Έτσι :

Το $x^2 + 2x - 15$ έχει $\Delta = 64$ και ρίζες $x_1 = -5$ και $x_2 = 3$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-5		3	$+\infty$
$x^2+2x-15$	+	0	-	0	+

Το $x - 2$ μηδενίζεται όταν $x = 2$ και είναι αρνητικό όταν $x < 2$ και θετικό όταν $x > 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-5		2		3	$+\infty$
$x^2+2x-15$	+	0	-		-	0	+
$x-2$	-		-	0	+		+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \leq 0$ που ισχύει όταν $x \in (-\infty, -5] \cup (2, 3]$

22.6 3)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $3 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{3 - x} > 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x^2 - 7x + 6 \text{ και } 3 - x \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 7x + 6)(3 - x) > 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2 - 7x + 6)(3 - x)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το $x^2 - 7x + 6$ έχει $\Delta = 25$ και ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 6$

Τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$	+	0	-	0	+

Το $3 - x$ μηδενίζεται όταν $x = 3$ και είναι αρνητικό όταν $x > 3$ και θετικό όταν $x < 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$3 - x$	+	0	-

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$

βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	1	3	6	$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$	+	0	-	0	+
$3 - x$	+	+	0	-	-
$P(x)$	+	0	-	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) > 0$ που ισχύει όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (3, 6)$

22.6 4)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ και $x \neq -1$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} \geq 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x - 1 \text{ και } x^2 + 3x + 2 \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το $x - 1$ μηδενίζεται όταν $x = 1$, είναι θετικό όταν $x > 1$ και αρνητικό όταν $x < 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

Το $x^2 + 3x + 2$ έχει ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = -1$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x^2 + 3x + 2$	+	0	0	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$
βρίσκεται με τη βοήθεια του
διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	$\parallel$	-	$\parallel$	+
x^2+7x+2	+	$\parallel$	-	$\parallel$	+
P(x)	-	$\parallel$	+	$\parallel$	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \geq 0$ που ισχύει όταν $x \in (-2, -1) \cup [1, +\infty)$

22.6 5)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$ και $x \neq 1$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x-3}{x^2+3x-4} < 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x-3 \text{ και } x^2+3x-4 \text{ είναι ετερόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2+3x-4) < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x-3)(x^2+3x-4)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το $x-3$ μηδενίζεται όταν $x=3$, είναι
θετικό όταν $x > 3$ και αρνητικό όταν
 $x < 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	-	$\parallel$	+

Το x^2+3x-4 έχει ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = 3$
Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
x^2+3x-4	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται
με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$
$x-3$	-	$\parallel$	-	$\parallel$	+
x^2+3x-4	+	$\parallel$	-	$\parallel$	+
P(x)	-	$\parallel$	+	$\parallel$	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) < 0$ που ισχύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 3)$

22.6 6)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $x^2 + 4x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$ και $x \neq 1$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+4x-5} < 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x^2-x-2 \text{ και } x^2+4x-5 \text{ είναι ετερόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-x-2)(x^2+4x-5) < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2-x-2)(x^2+4x-5)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το x^2-x-2 έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$
Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

X	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	0	-	0	+

Το x^2+4x-5 έχει ρίζες $x_1 = -5$ και $x_2 = 1$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
x^2+4x-5	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-5	-1	1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+		+		-	+
x^2+4x-5	+		-		+	+
$P(x)$	+		-		-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) < 0$ που ισχύει όταν $x \in (-5, -1) \cup (1, 2)$

22.6 7)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ και $x \neq 5$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 10} > 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x^2 - x - 12 \text{ και } x^2 - 3x - 10 \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - x - 12)(x^2 - 3x - 10) > 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2 - x - 12)(x^2 - 3x - 10)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το $x^2 - x - 12$ έχει ρίζες $x_1 = -3$ και $x_2 = 4$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
x^2-x-12	+		-	+

Το $x^2 - 3x - 10$ έχει ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = 5$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x^2-3x-10$	+		-	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$

βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-5	-1	1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+		+		-	+
x^2+4x-5	+		-		+	+
$P(x)$	+		-		-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) > 0$ που ισχύει όταν

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 4) \cup (5, +\infty)$$

22.6 8)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{(x^2 - 6x - 7)(x - 4)}{1 - x} \geq 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } (x^2 - 6x - 7)(x - 4) \text{ και } 1 - x \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x - 7)(x - 4)(1 - x) \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x^2 - 6x - 7)(x - 4)(1 - x)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά . Έτσι :

Το $x^2 - 6x - 7$ έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 7$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$
x^2-6x-7	+		-	+

Το $x-4$ μηδενίζεται όταν $x=4$, είναι θετικό όταν $x > 4$ και αρνητικό όταν $x < 4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	-	0	+

Το $1-x$ μηδενίζεται όταν $x=1$, είναι θετικό όταν $x < 1$ και αρνητικό όταν $x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	4	7	$+\infty$
x^2-6x-7	+	0	-	-	0	+
$x-4$	-	-	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-	-	-
P(x)	-	0	+	0	+	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \geq 0$ που ισχύει όταν $x \in [-1, 1] \cup [4, 7]$

22.6 9)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $(x^2 - 5x + 6)(x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ και $x \neq 2$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x+2}{(x^2-5x+6)(x+3)} \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ οι παραστάσεις $x+2$ και $(x^2-5x+6)(x+3)$ είναι ετερόσημες $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+2)(x^2-5x+6)(x+3) \leq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x+2)(x^2-5x+6)(x+3)$

Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά. Έτσι :

Το $x+2$ μηδενίζεται όταν $x=-2$, είναι θετικό όταν $x > -2$ και αρνητικό όταν $x < -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+

Το x^2-5x+6 έχει ρίζες $x_1=-3$ και $x_2=2$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

X	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Το $x+3$ μηδενίζεται όταν $x=-3$, είναι θετικό όταν $x > -3$ και αρνητικό όταν $x < -3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$

βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-3	-2	2	3	$+\infty$					
$x+2$	-		-	0	+		+		+		
x^2-5x-6	+		+		+	0	-	0	+		
$x+3$	-	0		+		+		+		+	
P(x)	+		-	0		+		-	0		+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \leq 0$ που ισχύει όταν $x \in (-3, -2] \cup (2, 3)$

22.6 10)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x+4} \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ οι παραστάσεις $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ και $x + 4$ είναι ετερόσημες $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)(x + 4) \leq 0$$

Κάνουμε Horner για το $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$. Μία ρίζα είναι το $x_1 = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -5 & 2 & 8 & \\ & 2 & -6 & -8 & \\ \hline 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$

Άρα $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x - 2)(x^2 - 3x - 4)$

Οπότε τώρα μπορούμε να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4)(x + 4)$

Το $x - 2$ μηδενίζεται όταν $x = 2$, είναι θετικό όταν $x > 2$ και αρνητικό όταν $x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x-2	-	0	+

Το $x^2 - 3x - 4$ έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 4$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+	0	-	+

Το $x + 4$ μηδενίζεται όταν $x = -4$, είναι θετικό όταν $x > -4$ και αρνητικό όταν $x < -4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
x+4	-	0	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-4	-1	2	4	$+\infty$
x-2	-		-	0	+	+
$x^2 - 3x - 4$	+		0	-	0	+
x+4	-	0	+		+	+
P(x)	+	0	-	0	-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $P(x) \leq 0$ που ισχύει όταν $x \in (-4, -1] \cup [2, 4]$