

22.5 1)

- α) Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι $\frac{x+1}{x-3} > 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $x+1$ και $x-3$ είναι ομόσημες** $\Rightarrow (x+1)(x-3) > 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$. Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 3$

Το $x^2 - 2x - 3$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = -1$

και $x_2 = 3$. Οπότε τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
x^2-2x-3	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x+1}{x-3} > 0$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

- β) Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$. Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι $\frac{2x-1}{x+4} \leq 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $2x-1$ και $x+4$ είναι ετερόσημες** $\Rightarrow (2x-1)(x+4) \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x^2 + 7x - 4 \leq 0$. Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα τριωνύμου $2x^2 + 7x - 4$.

Το $2x^2 + 7x - 4$ προφανώς έχει ρίζες

$x_1 = -4$ και $x_2 = \frac{1}{2}$. Οπότε τα πρόσημα του

φαίνονται στον διπλανό πίνακα (η διπλή γραμμή μας υπενθυμίζει τον περιορισμό)

x	$-\infty$	-4		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2+7x-4$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{2x-1}{x+4} \leq 0$ ισχύει όταν $x \in \left(-4, \frac{1}{2}\right]$

22.5 2)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι:

$\frac{x-1}{x-3} > 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $x-1$ και $x-3$ είναι ομόσημες** $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$

Το $x^2 - 4x + 3$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-1}{x-3} > 0$ που ισχύει όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

22.5 3)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς: $x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$\frac{x-2}{x+4} \leq 0 \Rightarrow$ **οι παραστάσεις $(x-2)$ και $(x+4)$ είναι ετερόσημες** $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(x+4) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $x^2 + 2x - 8$

Το $x^2 + 2x - 8$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = 2$ και $x_2 = -4$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
x^2+2x-8	+	0	-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x-2}{x+4} \leq 0$ που ισχύει όταν $x \in (-4, 2]$

22.5 4)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{3x+2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } 3x+2 \text{ και } x-1 \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x+2)(x-1) \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $3x^2 - x - 2$

Το $3x^2 - x - 2$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = -\frac{2}{3}$ και $x_2 = 1$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2-x-2$	+	0	-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{3x+2}{x-1} \geq 0$ που ισχύει όταν $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup (1, +\infty)$

22.5 5)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $4x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{x+7}{4x-3} \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } x+7 \text{ και } 4x-3 \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+7)(4x-3) < 0 \Rightarrow 4x^2 + 28x - 21 < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $4x^2 + 25x - 21$

Το $4x^2 + 25x - 21$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = -7$ και $x_2 = \frac{3}{4}$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-7	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$4x^2+25x-21$	+	0	-	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{x+7}{4x-3} < 0$ που ισχύει όταν $x \in \left(-7, \frac{3}{4}\right)$

22.5 6)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $2x+9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{9}{2}$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{-8x+1}{2x+9} \geq 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } -8x+1 \text{ και } 2x+9 \text{ είναι ομόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-8x+1)(2x+9) \geq 0 \Rightarrow -16x^2 - 70x + 9 \geq 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $-16x^2 - 70x + 9$

Το $-16x^2 - 70x + 9$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = \frac{1}{8}$ και $x_2 = -\frac{9}{2}$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{8}$	$+\infty$	
$-16x^2-70x+9$	-	0	+	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{-8x+1}{2x+9} \geq 0$ που ισχύει όταν $x \in \left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{8}\right]$

22.5 7)

Καταρχήν παίρνουμε περιορισμούς : $6x+11 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{11}{6}$

Με αυτόν τον περιορισμό ισχύει ότι :

$$\frac{3-x}{6x+11} < 0 \Rightarrow \text{οι παραστάσεις } 3-x \text{ και } 6x+11 \text{ είναι ετερόσημες} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x)(6x+11) < 0 \Rightarrow -6x^2 + 7x + 33 < 0$$

Οπότε πρέπει να βρούμε τα πρόσημα του τριωνύμου $-6x^2 + 7x + 33$

Το $-6x^2 + 7x + 33$ προφανώς έχει ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = -\frac{11}{6}$

Οπότε τα πρόσημά του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{11}{6}$	3	$+\infty$	
$-6x^2+7x+33$	-	0	+	0	-

Με βάση τον παραπάνω πίνακα η ανίσωση $\frac{3-x}{6x+11} < 0$ που ισχύει όταν $x \in \left(-\infty, -\frac{11}{6}\right) \cup (3, +\infty)$