

Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ

22.4 1)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Πιθανές ρίζες είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι ρίζα, αφού: $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = -1 + 1 = 0$

Οπότε παραγοντοποιούμε το $P(x)$ με σχήμα Horner:

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα: $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$

Οπότε κατά τα γνωστά πρέπει τώρα να βρούμε τα πρόσημα του $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$. Ξεκινάμε να βρούμε τα πρόσημα της κάθε παρένθεσης ξεχωριστά. Έτσι

Το $x-1$ μηδενίζεται όταν $x=1$, είναι αρνητικό όταν $x < 1$ και θετικό όταν $x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	0	+

Το $x^2 - x - 6$ έχει $\Delta = 1 + 24 = 25$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Τα πρόσημα του φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-	+

Το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ βρίσκεται με την βοήθεια του διπλανού πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
x-1	-	-	0	+	+
$x^2 - x - 6$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η ανίσωση $P(x) \geq 0$ ισχύει όταν $x \in [-1, 2] \cup [4, +\infty)$

22.4 2)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^3 - 2x^2 - x + 2$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2$ το $x=1$ είναι ρίζα, αφού:

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$$

Σχήμα Horner:

1	-2	-1	2	1
	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

Άρα: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$

παραγοντοποιούμε το τριώνυμο: $\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -1 \end{matrix}$

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
x-1	-	-	0	+	+
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

Άρα: $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ για $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

22.4 3)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ το $x=1$ είναι ρίζα, αφού :

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x^2 - 2x - 8)$$

παραγοντοποιούμε το τριώνυμο : $\Delta = 36, x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2		1		4	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+		+
x^2-2x-8	+	0	-		-	0	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα : } x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0 \text{ για } x \in (-2, 1) \cup (4, +\infty)$$

22.4 4)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^3 - 4x^2 - 7x - 10$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ το $x=-1$ είναι ρίζα, αφού :

$$(-1)^3 + 4(-1)^2 - 7(-1) - 10 = -1 + 4 + 7 - 10 = 0$$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -7 & -10 \\ & & -1 & -3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x^2 + 3x - 10)$$

παραγοντοποιούμε το τριώνυμο : $\Delta = 49, x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$$\text{Άρα : } x^3 - 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x+5)(x-2)$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-5		-1		2	$+\infty$
$x+1$	-		-	0	+		+
$x^2+3x-10$	+	0	-		-	0	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα : } x^3 - 4x^2 - 7x - 10 > 0 \text{ για } x \in (-5, -1) \cup (2, +\infty)$$

22.4 5)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^3 - 7x^2 - 21x + 27$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$ το $x=1$ είναι ρίζα, αφού :

$$1^3 - 7 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 + 27 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & -21 & 27 & 1 \\ & & 1 & -6 & -27 & \\ \hline & 1 & -6 & -27 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 7x^2 - 21x + 27 = (x-1)(x^2 - 6x - 27)$$

$$\text{παραγοντοποιούμε το τριώνυμο : } \Delta = 36 + 108 = 144, \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-3	1	9	$+\infty$
$x-1$	-		0	+	+
$x^2-6x-27$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

$$\text{Άρα : } x^3 - 7x^2 - 21x + 27 < 0 \quad \text{για } x \in (-\infty, 3) \cup (1, 9)$$

22.4 6)

$$2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < x^3 - 2x^2 + 3x - 8 \Rightarrow x^3 - 5x^2 - 8x + 12 < 0$$

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ το $x=1$ είναι ρίζα, αφού :

$$1^3 - 5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -8 & 12 & 1 \\ & & 1 & -4 & -12 & \\ \hline & 1 & -4 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x^2 - 4x - 12)$$

$$\text{παραγοντοποιούμε το τριώνυμο : } \Delta = 64, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x-6)(x+2)$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	1	6	$+\infty$
$x-1$	-		0	+	+
$x^2-4x-12$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

$$\text{Άρα : } x^3 - 5x^2 - 8x + 27 < 0 \quad \text{για } x \in (-\infty, -2) \cup (1, 6)$$

22.4 7)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ το $x=3$ είναι ρίζα, αφού :

$$3^4 - 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 12 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & -2 & -12 & 3 \\ & & 3 & 6 & 6 & 12 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = (x-3)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$$

Παραγοντοποίηση για το $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$, πιθανές ρίζες οι : ± 1 , ± 2 , ± 4

$$\text{Η } x = -2 \text{ είναι ρίζα, αφού : } (-2)^3 + 2(-2)^2 + 2(-2) + 4 = -8 + 8 - 4 + 4 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2 + 2)$$

$$\text{Οπότε : } x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = (x-3)(x+2)(x^2 + 2)$$

Το $x^2 + 2$ είναι προφανώς πάντα θετικό

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
x+2	-	0	+	+	
x-3	-	-	0	+	
x ² +2	+	+	+	+	
P(x)	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα : } x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 > 0 \text{ για } x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

22.4 8)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$:

πιθανές ρίζες: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 το $x = 1$ είναι ρίζα, αφού :

$$1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$$

Παραγοντοποίηση για το $x^3 - 4x^2 + x + 6$, πιθανές ρίζες οι : ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

$$\text{Η } x = -1 \text{ είναι ρίζα, αφού : } (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$\text{Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο : } \Delta = 1 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = 2 \end{array}$$

$$\text{Οπότε : } x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-1	1	2	3	$+\infty$			
x-1	-		0	+		+			
x+1	-	0	+		+	+			
x^2-5x+6	+		+	+	0	-	0	+	
P(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα: } x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \leq 0 \text{ για } x \in [-1, 1] \cup [2, 3]$$

22.4 9)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ το $x = -1$ είναι ρίζα, αφού:

$$(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 6 = 1 + 1 + 1 + 3 - 6 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner: } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ -1 & & -1 & 2 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)$$

Παραγοντοποίηση για το $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$, πιθανές ρίζες οι: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Η $x = 2$ είναι ρίζα, αφού: $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 6 = 0$

$$\text{Σχήμα Horner: } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & & 2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x+1)(x-2)(x^2+3)$$

$$\text{Οπότε: } x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x+1)(x-2)(x^2+3)$$

Το $x^2 + 3$ είναι προφανώς πάντα θετικό

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
x^2+3	+	+	+	+
P(x)	+	0	-	+

$$\text{Άρα: } x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0 \text{ για } x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

22.4 10)

Αρχικά παραγοντοποιούμε το $x^4 + 4x^3 - 16x - 16$:

πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ το $x = 2$ είναι ρίζα, αφού:

$$2^4 + 4 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 - 16 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner: } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 0 & -16 & -16 \\ 2 & & 2 & 12 & 24 & 16 \\ \hline & 1 & 6 & 12 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x-2)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$$

Παραγοντοποίηση για το $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, πιθανές ρίζες οι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Η $x = -2$ είναι ρίζα, αφού: $(-2)^3 + 6(-2)^2 + 12(-2) + 8 = -8 + 24 - 24 + 8 = 0$

$$\text{Σχήμα Horner: } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x+2)(x-2)(x^2 + 4x + 4)$$

Για το τριώνυμο $x^2 + 4x + 4$, έχουμε $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$$\text{Οπότε : } x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x+2)^3(x-2)$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x-2$	-		-	0	+
$(x+2)^3$	+	0	-		-
P(x)	-	0	+	0	-

$$\text{Άρα : } x^4 + 4x^3 - 16x - 16 \geq 0 \text{ για } x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

22.4 11)

Παραγοντοποιούμε το $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$:

πιθανές ρίζες οι ακέραιοι διαιρέτες του 30 :

Παρατηρούμε ότι η $x=2$ είναι ρίζα, αφού :

$$2^4 - 3 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 19 \cdot 2 + 30 = 16 - 24 - 60 + 38 + 30 = 0$$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 \\ 2 & & 2 & -2 & -34 & -30 \\ \hline & 1 & -1 & -17 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = (x-2)(x^3 - x^2 - 17x - 15)$$

Για το $x^3 - x^2 - 17x - 15$, πιθανές ρίζες οι : $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

Η $x=-1$ είναι ρίζα, αφού : $(-1)^3 - (-1)^2 - 17(-1) - 15 = -1 - 1 + 17 - 15 = 0$

$$\text{Σχήμα Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -17 & -15 \\ -1 & & -1 & 2 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - x^2 - 17x - 15 = (x+1)(x^2 - 2x - 15)$$

$$\text{Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο } \Delta = 4 + 60 = 64 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = -3 \end{array}$$

$$\text{Οπότε : } x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = (x-2)(x+1)(x-5)(x+3)$$

Πίνακας προσήμων :

x	$-\infty$	-3	-1	2	5	$+\infty$			
x-2	-		-	0	+	+			
x+1	-		0	+	+	+			
$x^2-2x-15$	+	0	-		-	0	+		
P(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα : } x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 \leq 0 \Rightarrow x \in [-3, 1] \cup [2, 5]$$