

21.9 1)

Πριν απ' όλα θα κάνουμε παραγοντοποίηση σε όσους παρονομαστές αυτό είναι εφικτό. Εδώ

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = -3 \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix}$$

μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

Στη συνέχεια παίρνουμε περιορισμούς. Επειδή οι παρονομαστές δεν πρέπει να μηδενιστούν έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x+3 &\neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \\ x-1 &\neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ x^2+2x-3 &\neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -3$$

Τέλος θα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών το οποίο είναι το ΕΚΠ $= (x+3)(x-1)$. Έτσι έχουμε

$$\cancel{(x+3)}(x-1) \frac{x^2}{\cancel{x+3}} + (x+3) \cancel{(x-1)} \frac{3x}{\cancel{x-1}} = \cancel{(x+3)} \cancel{(x-1)} \frac{14x+6}{\cancel{(x+3)} \cancel{(x-1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) + 3x(x+3) = 14x+6 \Rightarrow x^3 - x^2 + 3x^2 + 9x - 14x - 6 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $x = -1$ είναι ρίζα του πολωνύμου $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ οπότε το

παραγοντοποιούμε με σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -5 & -6 & -1 \\ & -1 & -1 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα } x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+1 &= 0 & \text{ή } x-2 &= 0 \Rightarrow & \text{ή } x+3 &= 0 \Rightarrow \\ x &= -1 & \text{|||} \Rightarrow x &= 2 & \text{|||} \Rightarrow x &= -3 \end{aligned} \quad \text{απορρίπτεται λόγω των περιορισμών}$$

Οπότε η εξίσωση έχει ρίζες το -1 και το 2

21.9 2)

Περιορισμοί : πρέπει $2x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$$x^2 - \frac{3x-2}{2x-3} = 0 \Rightarrow \frac{x^2(2x-3)}{2x-3} - \frac{3x-2}{2x-3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{2x-3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $x = -1$ είναι ρίζα, αφού :

$$2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = -1 + 1 = 0$$

Σχήμα Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ & -2 & 5 & -2 & \\ \hline 2 & -5 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 \quad , \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

21.9 3)

Περιορισμοί : πρέπει $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$\frac{x^3}{x+1} - 4x + \frac{5x+6}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x+1} - \frac{4x(x+1)}{x+1} + \frac{5x+6}{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 5x + 6}{x+1} = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $x = 2$ είναι ρίζα , αφού : $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = -8 + 8 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & 1 & 6 & 2 \\ & 2 & -4 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & \text{απορρίπτεται λόγω αρχικού περιορισμού} \\ x_2 = \boxed{3} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

21.9 4)

Περιορισμοί : πρέπει $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{4x}{x-2} - \frac{x^3}{x-2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{4x}{x-2} - \frac{x^3}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x - x^3 + 3x - 6}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{-x^3 + 7x - 6}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι ρίζα , αφού : $1^3 - 7 \cdot 1^2 + 6 = 6 - 6 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -7 & 6 & 1 \\ & 1 & 1 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & \text{απορρίπτεται λόγω αρχικού περιορισμού} \\ x_2 = \boxed{-3} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Περιορισμοί : $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ και

$$x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x(x - 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 2$$

$$\frac{x^2 - 5}{x - 2} - \frac{x + 2}{x} - \frac{2x^2 - x - 8}{x^2 - 2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2 - 5)}{x(x - 2)} - \frac{(x + 2)(x - 2)}{x(x - 2)} - \frac{2x^2 - x - 8}{x(x - 2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 5x - (x^2 - 4) - 2x^2 + x + 8}{x(x - 2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 5x - x^2 + 4 - 2x^2 + x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Η $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης (παρόλο που δεν είναι ρίζα της αρχικής), αφού :

$$2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = -12 + 12 = 0$$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & -4 & 12 & 2 \\ & 2 & -2 & -12 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ απορρίπτεται λόγω αρχικών περιορισμών ή } x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \boxed{3} \text{ δεκτή} \\ \searrow x_2 = \boxed{-2} \text{ δεκτή} \end{array}$$

Περιορισμοί : $x \neq 0$

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} + \frac{2}{x^2 - x} = \frac{3x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x - 1)x} + \frac{2}{x(x - 1)} = \frac{x(3x^2 - 1)}{x(x - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)x} + \frac{2}{x(x - 1)} - \frac{x(3x^2 - 1)}{x(x - 1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1)^2(x - 2) + 2 - x(3x^2 - 1)}{x(x - 1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1)(x - 2) + 2 - 3x^3 + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 + 2 - 3x^3 + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^3 - 4x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -x(2x^2 + 4x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

(απορρίπτεται λόγω

αρχικών περιορισμών)

ή

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \boxed{-3} & \text{δεκτή} \\ x_2 = 1 & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

21.9 7)

Περιορισμοί : $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

$$\frac{3x+2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - x - \frac{2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 3x + 2x - 2 + 3x + 3 - x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Η $x = -1$ είναι ρίζα (παρόλο που δεν είναι της αρχικής)

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ & -1 & 4 & -1 & \\ \hline 1 & -4 & 1 & 0 & \end{array}$$

Άρα : $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -1$$

ή

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

(απορρίπτεται λόγω

αρχικών περιορισμών)

$$\Delta = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

21.9 8)

Περιορισμοί : $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \text{ και } x \neq -2$$

$$x + \frac{2x+1}{x-3} = \frac{1}{x+2} + \frac{4x^2-x+2}{x^2-x-6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)} - \frac{(x-3)}{(x+2)(x-3)} - \frac{4x^2-x+2}{(x+2)(x-3)} + \frac{(2x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2 - x - 6) - x + 3 - 4x^2 + x - 2 + 2x^2 + 4x + x + 2}{(x+2)(x-3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 6x - x + 3 - 4x^2 + x - 2 + 2x^2 + 4x + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι ρίζα, αφού: $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = -2 + 2 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ & 1 & -2 & -3 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \boxed{-1} \text{ δεκτή} \\ x_2 = 3 \text{ απορρίπτεται λόγω αρχικών περιορισμών} \end{cases}$$

21.9 9)

Περιορισμοί: $x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$

$$x^2 - x - 18 + \frac{72}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - x)(x^2 - x)}{x^2 - x} - \frac{18(x^2 - x)}{x^2 - x} + \frac{72}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - x)^2 - 18x^2 + 18x + 72}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 18x^2 + 90 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = 0$$

Η $x = -2$ είναι ρίζα, αφού $(-2)^4 - 2(-2)^3 - 17(-2)^2 + 18(-2) + 72 = 0$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -2 & -17 & 18 & 72 & -2 \\ & -2 & 8 & 18 & -72 & \\ \hline 1 & -4 & -9 & 36 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα: } x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^3 - 4x^2 - 9x + 36) = 0$$

Για την $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$, η $x = 3$ είναι ρίζα

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -9 & 36 & 3 \\ & 3 & -3 & -36 & \\ \hline 1 & -1 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$\text{'Αρα : } x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-3)(x^2 - x - 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-2} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=3} \quad \text{ή} \quad x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \boxed{4} \\ \searrow x_2 = \boxed{-3} \end{array}$$

21.9 10)

$$\text{Περιορισμοί : } x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2$$

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \quad \text{και}$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{(x-2)(x+2)} - 2x + \frac{x-3}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{3x-10}{(x-2)(x+2)} + \frac{2x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2-3x+10-2x^3+8x+x^2-x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^3+x^2+5x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$$

$$\text{Η } x = -1 \text{ είναι ρίζα, αφού } 2(-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) - 2 = -3 + 3 = 0$$

Σχήμα Horner :

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -2 & -1 \\ & -2 & 3 & 2 & \\ \hline 2 & -3 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{'Αρα : } 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-1} \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 2 \text{ απορριπτεται λόγω των αρχικών περιορισμών} \\ \searrow x_2 = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{array}$$