21.8 1)

Είναι $x^6-21x^2+20=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^3-21x^2+20=0 \overset{\text{θέτουμε } y=x^2}{\Leftrightarrow} y^3-21y+20=0$

Παρατηρούμε ότι η $y=1$ είναι ρίζα , αφού : $1^3-21\cdot 1+20=0$

Οπότε παραγοντοποιούμε το $y^3-21y+20$ με σχήμα Horner :

	1	0	−21	20	1
		1	1	−20	
	1	1	−20	0	

y^2+y-20: $\Delta=1+80=81$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 9}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1+9}{2}=4 \\ x_2=\frac{-1-9}{2}=-5 \end{cases}$

Άρα $y^3-21y+20=0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2-y-20\right)=0 \Leftrightarrow$

$(y-1)(y-4)(y+5)=0 \overset{y=x^2}{\Leftrightarrow} \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2+5\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x^2-1=0$ ή $x^2-4=0\Rightarrow$ ή $x^2+5=0\Rightarrow$

$x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$ $\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$ $\Rightarrow x^2=-5$ αδύνατη

21.8 2)

$x^4-12x^2+27=0\Rightarrow \left(x^2\right)^2-12x^2+27=0$

Θέτω : $x^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^2-12\omega+27=0$

$\Delta=12^2-4\cdot 27=36$

$\omega_{1,2}=\frac{12\pm 6}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=3 \end{cases}$

Άρα : $*\ \omega_1=9\Rightarrow x_1^{\,2}=9\Rightarrow x_1=\pm 3$

$*\ \omega_2=3\Rightarrow x_2^{\,2}=3\Rightarrow x_2=\pm\sqrt{3}$

21.8 3)

$x^6-5x^3-24=0\Rightarrow \left(x^3\right)^2-5x^3-24=0$

Θέτω : $x^3=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^2-5\omega-24=0$

$\Delta=5^2+4\cdot 24=121$

$\omega_{1,2}=\frac{5\pm 11}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=-3 \end{cases}$

Άρα : $*\ \omega_1=8\Rightarrow x_1^{\,3}=8\Rightarrow x_1=2$

$*\ \omega_2=-2\Rightarrow x_2^{\,3}=-3\Rightarrow x_2=-\sqrt[3]{3}$

21.8 4)

$x^8-13x^4-48=0\Rightarrow \left(x^4\right)^2-13x^4-48=0$

Θέτω : $x^4=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^2-13\omega-48=0$

$\Delta=13^2+4\cdot 48=361$

$$\omega_{1,2}=\frac{13\pm 19}{2}\Rightarrow \begin{nearmatrix} \nearrow x_1=16 \\ \searrow x_2=-3 \end{nearmatrix}$$

΄Αρα : $*\ \omega_1=16\Rightarrow x_1^{\,4}=16\Rightarrow x_1=\pm 2$

$*\ \omega_2=-3\Rightarrow x_2^{\,4}=-3$ αδύνατη

21.8 5)

$x^6-3x^4-6x^2+8=0\Rightarrow \left(x^2\right)^3-3\left(x^2\right)^2-6x^2+8=0$

Θέτω : $x^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^3-3\omega^2-6\omega+8=0$

Πιθανές ρίζες : ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8

Η $\omega=1$ είναι ρίζα αφού : $1^3-3\cdot 1^2-6\cdot 1+8=-8+8=0$

Σχήμα Horner :

1	−3	−6	8	1
	1	−2	−8	
1	−2	−8	0	

΄Αρα : $\omega^3-3\omega^2-6\omega+8=0\Rightarrow (\omega-1)\left(\omega^2-2\omega-8\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega=1$ ή $\omega^2-2\omega-8=0$, $\Delta=36$, $\omega_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}\Rightarrow \begin{nearmatrix} \nearrow x_1=4 \\ \searrow x_2=-2 \end{nearmatrix}$

΄Αρα : $\omega=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

ή $\omega=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

ή $\omega=-2\Rightarrow x^2=-2$ αδύνατη

21.8 6)

$x^6-13x^2+12=0\Rightarrow \left(x^2\right)^3-13\cdot x^2-6x^2+12=0$

Θέτω : $x^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^3-13\omega^2+12=0$

Η $\omega=1$ είναι ρίζα αφού : $1^3-13\cdot 1+12=0$

Σχήμα Horner :

1	0	−13	12	1
	1	1	−12	
1	1	−12	0	

΄Αρα : $\omega^3-13\omega+12=0\Rightarrow (\omega-1)\left(\omega^2+\omega-12\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \omega=1$ ή $\omega^2+\omega-12=0$, $\Delta=49$, $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2}\Rightarrow \begin{nearmatrix} \nearrow x_1=-4 \\ \searrow x_2=3 \end{nearmatrix}$

΄Αρα : $\omega=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

ή $\omega=-4\Rightarrow x^2=-4$ αδύνατη

ή $\omega=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

21.8 7)

$x^6-6x^4+32=0\Rightarrow \left(x^2\right)^3-6\left(x^2\right)^2+32=0$

Θέτω : $x^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^3-6\omega^2+32=0$

Η $\omega=-2$ είναι ρίζα αφού : $(-2)^3-6(-2)^2+32=-32+32=0$

Σχήμα Horner :

1	−6	0	32	−2
	−2	16	−32	
1	−8	16	0	

Άρα : $\omega^3-6\omega^2+32=0\Rightarrow(\omega+2)(\omega^2-8\omega+16)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega=-2$ ή $\omega^2-8\omega+16=0\Rightarrow(\omega-4)^2=0\Rightarrow\omega=4$

Άρα : $\omega=-2\Rightarrow x^2=-2$ αδύνατη

ή $\omega=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$ αδύνατη

21.8 8)

$(x^2+1)^3-8(x^2+1)^2+17(x^2+1)-10=0$

Θέτω : $x^2+1=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^3-8\omega^2+17\omega-10=0$

Η $\omega=1$ είναι ρίζα αφού : $1^3-8\cdot1^2+17\cdot1-10=-17+17=0$

Σχήμα Horner :

1	−8	17	−10	1
	1	−7	10	
1	−7	10	0	

Άρα : $\omega^3-8\omega^2+17\omega-10=0\Rightarrow(\omega-1)(\omega^2-7\omega+10)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega=1$ ή $\omega^2-7\omega+10=0$, $\Delta=9$, $\omega_{1,2}=\dfrac{7\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=2\end{cases}$

Άρα : $\omega=1\Rightarrow x^2+1=1\Rightarrow x=0$

ή $\omega=5\Rightarrow x^2+1=5\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$

ή $\omega=2\Rightarrow x^2+1=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

21.8 9)

$(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)+2=0$

Θέτω : $x^2-3x=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^2+3\omega+2=0$

$\Delta=1$, $\omega_{1,2}=\dfrac{-3\pm1}{2}\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$

Άρα : $\omega=-1\Rightarrow x^2-3x=-1\Rightarrow x^2-3x+1=0$, $\Delta=5$, $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

ή $\omega=-2\Rightarrow x^2-3x+2=0$, $\Delta=1$, $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$

21.8 10)

$(x^2+x)^6-7(x^2+x)^3-8=0$

Θέτω : $(x^2+x)^3=\omega$ και η εξίσωση γράφεται :

$\omega^2-7\omega-8=0$

$\Delta=81 \quad , \quad \omega_{1,2}=\dfrac{7\pm 9}{2}\begin{cases}8\\-1\end{cases}$

΄Αρα :

$\omega=8\Rightarrow\left(x^2+x\right)^3=8\Rightarrow x^2+x=2\Rightarrow x^2+x-2=0 \quad , \quad \Delta=9 \quad , \quad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\nearrow x_1=-2\\\searrow x_2=1\end{cases}$

ή $\quad \omega=-1\Rightarrow\left(x^2+x\right)^3=-1\Rightarrow x^2+x=-1\Rightarrow x^2+x+1=0$ αδύνατη αφού $\Delta<0$