

21.7 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 3$. Παρατηρούμε ότι $\begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 7 > 0 \end{cases}$

Άρα σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η f (και άρα και η εξίσωση $x^3 + x - 3 = 0$) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

Τώρα υπολογίζουμε (με κομπιουτεράκι προφανώς) τις τιμές $f(1,1)$, $f(1,2)$, ..., $f(1,9)$ και παρατηρούμε ότι $f(1,1) = -0,569 < 0$, $f(1,2) = -0,072 < 0$, $f(1,3) = 0,497 > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(1,2) < 0 \\ f(1,3) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα $(1,2, 1,3)$

Τώρα υπολογίζουμε (πάλι με κομπιουτεράκι) τις τιμές $f(1,21)$, $f(1,22)$, ..., $f(1,29)$ και παρατηρούμε ότι $f(1,21) = -0,01844 < 0$, $f(1,22) = 0,035848 > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(1,21) < 0 \\ f(1,22) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα $(1,21, 1,22)$ δηλαδή ισχύει

$1,21 < \rho < 1,22$ που σημαίνει με προσέγγιση δεκάτου είναι $\rho = 1,2$

21.7 2)

2) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 1$

Παρατηρούμε ότι $\begin{cases} f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 1 = -2 < 0 \\ f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \end{cases}$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα η f (και άρα η εξίσωση $x^3 - 2x - 1 = 0$), έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Τώρα υπολογίζουμε (με κομπιουτεράκι προφανώς) τις τιμές $f(1,1)$, $f(1,2)$, ..., $f(1,9)$ και παρατηρούμε ότι

$f(1,1) < 0$, $f(1,2) < 0$, ..., $f(1,7) > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(1,6) < 0 \\ f(1,7) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα $(1,6, 1,7)$

Τώρα υπολογίζουμε (πάλι με κομπιουτεράκι) τις τιμές

$f(1,61)$, $f(1,62)$, ..., $f(1,69)$ και παρατηρούμε ότι

$f(1,61) = -0,04 < 0$ και $f(1,62) = 0,01 > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(1,61) < 0 \\ f(1,62) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα

$(1,61, 1,62)$ που σημαίνει ότι με προσέγγιση δεκάτου είναι $\rho = 1,6$

21.7 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - 7$

Παρατηρούμε ότι $\begin{cases} f(2) = -3 < 0 \\ f(3) = 11 > 0 \end{cases}$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα η f (και άρα η εξίσωση $x^3 - x^2 - 7 = 0$), έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$

Τώρα υπολογίζουμε (με κομπιουτεράκι προφανώς) τις τιμές

$f(2,1)$, $f(2,2) \dots \dots f(2,9)$ και παρατηρούμε ότι

$f(2,1) < 0$, $f(2,2) < 0$, $f(2,3) < 0$, $f(2,4) > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(2,3) < 0 \\ f(2,4) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα $(2,2 , 2,3)$

Τώρα υπολογίζουμε (πάλι με κομπιουτεράκι) τις τιμές

$f(2,21)$, $f(2,22) \dots \dots f(2,29)$ και παρατηρούμε ότι

$f(2,31) = -9,7 \cdot 10^{-3} < 0$ και $f(2,32) = 0,1 > 0$

δηλαδή είναι $\begin{cases} f(2,31) < 0 \\ f(2,32) > 0 \end{cases}$ και άρα η εξίσωση έχει ρίζα στο διάστημα

$(2,31 , 2,32)$ δηλαδή ισχύει $2,31 < \rho < 2,32$

που σημαίνει ότι με προσέγγιση δέκατου είναι $\rho = 2,3$