

21.13 1)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x \geq 0$. Με τον περιορισμό αυτό θέτουμε $y = \sqrt{x}$ και έχουμε

$$x\sqrt{x} - 2x - 9\sqrt{x} + 18 = 0 \xrightarrow{y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x} y^3 - 2y^2 - 9y + 18 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η $y = 2$ είναι ρίζα, αφού: $2^3 - 2 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 18 = 0$

Οπότε παραγοντοποιούμε το $y^3 - 2y^2 - 9y + 18 = 0$ με σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -9 & 18 & 2 \\ & 2 & 0 & -18 & \\ \hline 1 & 0 & -9 & 0 & \end{array}$$

Άρα $y^3 - 2y^2 - 9y + 18 = 0 \Rightarrow (y-2)(y^2-9) = 0 \Rightarrow (y-2)(y-3)(y+3) = 0 \xrightarrow{y=\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2=0 \quad \text{ή} \quad \sqrt{x}-3=0 \Rightarrow \quad \text{ή} \quad \sqrt{x}+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \text{ δεκτή} \quad ||| \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \text{ δεκτή} \quad ||| \Rightarrow \sqrt{x}=-3 \text{ αδύνατη}$$

21.13 2)

Πρέπει $x > 0$

Θέτω $\omega = \sqrt{x} > 0$ και η εξίσωση γράφεται: $\omega^4 - 15\omega^2 - 10\omega + 24 = 0$

Η $\omega = 1$ είναι ρίζα, αφού $1^4 - 15 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 24 = -24 + 24 = 0$

Σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & 1 \\ & 1 & 1 & -14 & -24 & \\ \hline 1 & 1 & -14 & -24 & 0 & \end{array}$$

Οπότε: $\omega^4 - 15\omega^2 - 10\omega + 24 = 0 \Rightarrow (\omega-1)(\omega^3 + \omega^2 - 14\omega - 24) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega=1} \quad \text{ή} \quad \omega^3 + \omega^2 - 14\omega - 24 = 0$$

Για την δεύτερη εξίσωση, η $\omega = 4$ είναι ρίζα, αφού: $4^3 + 4^2 - 14 \cdot 4 - 24 = 100 - 100 = 0$

Σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -14 & -24 & 4 \\ & 4 & 20 & 24 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Άρα: $\omega^3 + \omega^2 - 14\omega - 24 = 0 \Rightarrow (\omega-4)(\omega^2 + 5\omega + 6) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega=4} \quad \text{ή} \quad \omega^2 + 5\omega + 6 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Άρα: $\omega = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$$\omega = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$\omega = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ αδύνατη}$$

$$\omega = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ αδύνατη}$$

Περιορισμοί : * $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Θέτω $\sqrt{x+1} = \omega > 0 \Rightarrow x+1 = \omega^2 \Rightarrow x = \omega^2 - 1$ και η εξίσωση γράφεται :

$$\frac{\omega^2 - 1}{1 + \omega} + \frac{1 - \omega}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \omega)(\omega - 1)}{(1 + \omega)} + \frac{1 - \omega}{2} = 4 \stackrel{\omega + 1 \neq 0}{\Rightarrow} \omega - 1 + \frac{1 - \omega}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega - 1}{2} = 4 \Rightarrow \omega = 9 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 = 81 \Rightarrow x = 80 \text{ δεκτή}$$