

21.12 1)

Η εξίσωση ορίζεται όταν
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2+\sqrt{x+1} \geq 0 \text{ (ισχύει πάντα διότι } \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 7 \end{cases}$$
. Οι ανισώσεις

αυτές συναληθεύουν όταν $-1 \leq x \leq 7$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\sqrt{2+\sqrt{x+1}} = \sqrt{7-x} \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{x+1}}^2 = \sqrt{7-x}^2 \Rightarrow 2+\sqrt{x+1} = 7-x \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}^2 = (5-x)^2 \Rightarrow x+1 = 25-10x+x^2 \Rightarrow x^2-11x+24 \Rightarrow \Delta=121-96=25, x_{1,2}=\frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow x=3 \text{ ή } x_2=8$$

Η τιμή $x_1=8$ απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τον περιορισμό. Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x=3$

Για $x=3$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{2+\sqrt{3+1}} = \sqrt{7-3} \Leftrightarrow \sqrt{2+2} = \sqrt{4}$ που ισχύει οπότε η ρίζα $x=3$ γίνεται δεκτή

21.12 2)

Η εξίσωση ορίζεται όταν
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+\sqrt{x} \geq 0 \text{ που ισχύει πάντα} \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \in [0, 3]$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{3-x} \Rightarrow 1+\sqrt{x} = 3-x \Rightarrow \sqrt{x} = 2-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}^2 = (2-x)^2 \Rightarrow x = 4-4x+x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4 \text{ ή } x=1$$

Η τιμή $x=4$ δεν ικανοποιεί τον περιορισμό, οπότε απορρίπτεται
Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x=1$

Για $x=1$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{3-1} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$
που ισχύει, οπότε η ρίζα $x=1$ γίνεται δεκτή

21.12 3)

Περιορισμοί : * $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ και
 $11-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 11$ και
 $2+\sqrt{x-3} \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \geq 3$

$$2+\sqrt{x-3} = 11-x \Rightarrow \sqrt{x-3} = 9-x$$

Περιορισμοί : * $9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9$

$$\Rightarrow x-3 = 81-18x+x^2 \Rightarrow x^2-19x+84=0$$

$$\Delta=25$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=12 \text{ απορρίπτεται αφού πρέπει } 3 \leq x \leq 9 \\ x_2=7 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

21.12 4)

$$\text{Η εξίσωση ορίζεται όταν } \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 1+\sqrt{x+7} \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \text{ που ισχύει πάντα } \Rightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \in [-2, +\infty)$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\sqrt{1+\sqrt{x+7}} = \sqrt{x+2} \Rightarrow 1+\sqrt{x+7} = x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+7} = x+1 \Rightarrow x+7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = -3$$

Η τιμή $x = -3$ δεν ικανοποιεί τον περιορισμό, οπότε απορρίπτεται

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x = 2$

$$\text{Για } x = 2 \text{ η αρχική εξίσωση γίνεται } \sqrt{1+\sqrt{2+7}} = \sqrt{2+2} \Rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4}$$

που ισχύει, οπότε η ρίζα $x = 2$ γίνεται δεκτή

21.12 5)

$$\text{Η εξίσωση ορίζεται όταν } \begin{cases} 8x+1 \geq 0 \\ 4+\sqrt{8x+1} \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \text{ που ισχύει πάντα } \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{8} \\ x \geq -6 \end{cases}$$

Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \in [-6, +\infty)$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\sqrt{4+\sqrt{8x+1}} = \sqrt{x+6} \Rightarrow 4+\sqrt{8x+1} = x+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{8x+1} = x+2 \Rightarrow 8x+1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Και οι δύο τιμές ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x = 1 \text{ η αρχική εξίσωση γίνεται } \sqrt{4+\sqrt{8 \cdot 1 + 1}} = \sqrt{1+6} \Rightarrow \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

που ισχύει, οπότε η ρίζα $x = 1$ γίνεται δεκτή

$$\text{Για } x = 3 \text{ η αρχική εξίσωση γίνεται } \sqrt{4+\sqrt{8 \cdot 3 + 1}} = \sqrt{3+6} \Rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$$

που ισχύει, οπότε η ρίζα $x = 3$ γίνεται δεκτή