

21.11 1)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \text{και} \\ 5x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{5} \end{cases}$. Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \geq -1$.

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{5x+1} - 2 \Rightarrow \sqrt{x+1}^2 = (\sqrt{5x+1} - 2)^2 \Rightarrow x+1 = \sqrt{5x+1}^2 - 4\sqrt{5x+1} + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 = 5x+1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{5x+1} = 4x+4 \Rightarrow \sqrt{5x+1} = x+1 \Rightarrow \sqrt{5x+1}^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5x+1}^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 5x+1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

Και οι δύο παραπάνω τιμές ικανοποιούν τον περιορισμό. Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση

Για $x = 0$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{0+1} = \sqrt{5 \cdot 0 + 1} - 2 \Rightarrow 1 = 1 - 2$ που δεν ισχύει οπότε η ρίζα $x = 0$ απορρίπτεται

Για $x = 3$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{3+1} = \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 \Rightarrow 2 = 4 - 2$ που ισχύει οπότε η ρίζα $x = 3$ γίνεται δεκτή

21.11 2)

Περιορισμοί : * $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ και
 $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4} \Rightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2 = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow x-2 = \sqrt{x+4}$$

Περιορισμοί : $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{αφού πρέπει } x \geq 2 \quad \text{ή} \quad x = 5 \text{ δεκτή}$$

21.11 3)

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} = 1$$

Περιορισμοί : * $x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$ και
 $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$\sqrt{x+7} = 1 + \sqrt{x+2} \Rightarrow x+7 = 1 + 2\sqrt{x+2} + x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ δεκτή}$$

21.11 4)

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{x-1}$$

Περιορισμοί : * $5x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{5}$ και
 $8-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ και

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad \text{και}$$

$$5x-1 \geq 8-2x \Rightarrow 7x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{7}$$

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{8-2x} = x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-1 - 2\sqrt{(5x-1)(8-2x)} + 8-2x = x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{-10x^2 + 42x - 8} = -2x - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{-10x^2 + 42x - 8} = x + 4$$

$$\text{Περιορισμοί : } x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$

$$-10x^2 + 42x - 8 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 11x^2 - 34x + 24 = 0$$

$$\Delta = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm 10}{22} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \boxed{2} \text{ δεκτή} \\ x_2 = \frac{12}{11} \text{ απορρίπτεται αφού πρέπει } x \geq \frac{9}{7} \end{cases}$$

21.11 5)

$$\text{Η εξίσωση ορίζεται όταν } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν $x \geq 2$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-3} \Rightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^2 = \sqrt{4x-3}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} + x-2 = 4x-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2)} + 2x-1 = 4x-3 \Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 2x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)(x-2)} = x-1 \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = 3$$

Η τιμή αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό.

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x=3 \text{ η αρχική εξίσωση γίνεται } \sqrt{3+1} + \sqrt{3-2} = \sqrt{4 \cdot 3 - 3} \Rightarrow 2+1=3$$

που ισχύει, οπότε η ρίζα $x=3$ γίνεται δεκτή