

21.10 1)

α) Η εξίσωση ορίζεται όταν $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow \sqrt{x-2}^2 = (x-4)^2 \Rightarrow x-2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ ή } x = 3$$

Και οι δύο παραπάνω τιμές ικανοποιούν τον περιορισμό. Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση

Για $x = 6$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{6-2} = 6-4$ που ισχύει οπότε η ρίζα $x = 6$ γίνεται δεκτή

Για $x = 3$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{3-2} = 3-4 \Leftrightarrow 1 = -1$ που δεν ισχύει οπότε η ρίζα $x = 3$ απορρίπτεται

β) Η εξίσωση ορίζεται όταν $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$. Οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν όταν

$-3 \leq x \leq 3$. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 9-x^2 = 2x+1 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2$$

Η τιμή $x_1 = -4$ απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τον περιορισμό. Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x = 2$

Για $x = 2$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{9-2^2} = \sqrt{2 \cdot 2 + 1} \Rightarrow \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ που ισχύει οπότε η ρίζα $x = 2$ γίνεται δεκτή

21.10 2)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{x+2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2}^2 = 1^2 \Rightarrow x+2 = 1 \Rightarrow x = -1 \geq -2 \text{ άρα ικανοποιεί τον περιορισμό}$$

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση : $\sqrt{-1+2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$ που ισχύει

Οπότε η ρίζα $x = -1$ γίνεται δεκτή

21.10 3)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{2x-3} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x-3}^2 = 5^2 \Rightarrow 2x-3 = 25 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = 14 \geq \frac{3}{2}$$

άρα ικανοποιεί τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση : $\sqrt{2 \cdot 14 - 3} = 5 \Rightarrow \sqrt{25} = 5 \Rightarrow 5 = 5$ που ισχύει

Οπότε η ρίζα $x = 14$ γίνεται δεκτή

21.10 4)

Η εξίσωση είναι αδύνατη , αφού $\sqrt{3x-2} \geq 0$ για κάθε $x \geq \frac{2}{3}$, όπου και ορίζεται.

21.10 5)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{2x} = x \Rightarrow \sqrt{2x^2} = x^2 \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Και οι δύο ρίζες ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x = 0, \quad \sqrt{2 \cdot 0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 0$ γίνεται δεκτή

$$\text{Για } x = 2, \quad \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \Rightarrow \sqrt{4} = 2 \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 2$ γίνεται δεκτή

21.10 6)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Rightarrow \sqrt{x-1}^2 = (x-3)^2 \Rightarrow x-1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \overset{\Delta=9}{\Rightarrow} x = 5 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Και οι δύο ρίζες ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x = 5, \quad \sqrt{5-1} = 5-3 \Rightarrow 2 = 2 \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 5$ γίνεται δεκτή

$$\text{Για } x = 2, \quad \sqrt{2-1} = 2-3 \Rightarrow 1 = -1 \text{ που δεν ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 2$ δεν γίνεται δεκτή

21.10 7)

$$x + \sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{x+2} = -x$$

$$\text{Περιορισμοί : } * \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad \text{και} \\ -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$x+2 = (-x)^2 \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{2} \text{ απορρίπτεται αφού πρέπει } -2 \leq x \leq 0 \\ \boxed{-1} \text{ δεκτή} \end{array} \right.$$

21.10 8)

$$\sqrt{x+2} + x = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 4 - x$$

$$\text{Περιορισμοί : } * \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad \text{και} \\ 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$x+2 = (4-x)^2 \Rightarrow x+2 = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 7 \\ \searrow x_2 = 2 \end{matrix} \begin{matrix} \text{απορρίπτεται αφού πρέπει } -2 \leq x \leq 4 \\ \text{δεκτή} \end{matrix}$$

21.10 9)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $4x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1} &= 2x-1 \Rightarrow \sqrt{4x+1}^2 = (2x-1)^2 \Rightarrow 4x+1 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 - 8x &= 0 \Rightarrow 4x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Και οι δύο ρίζες ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

Για $x = 0$, $\sqrt{4 \cdot 0 + 1} = 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1$ που δεν ισχύει

Οπότε η ρίζα $x = 0$ δεν γίνεται δεκτή

Για $x = 2$, $\sqrt{4 \cdot 2 + 1} = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$ που ισχύει

Οπότε η ρίζα $x = 2$ γίνεται δεκτή

21.10 10)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad \text{ή} \quad x \geq 1$. Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = x \Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 2}^2 = x^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + x - 2 = \cancel{x^2} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Η παραπάνω τιμή ικανοποιεί τον περιορισμό. Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση

Για $x = 2$ η αρχική εξίσωση γίνεται $\sqrt{2^2 + 2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$ που ισχύει οπότε η ρίζα $x = 2$ γίνεται δεκτή

21.10 11)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x - 2} &= x-1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2}^2 = (x-1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 &= x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

Για $x = 3$, $\sqrt{3^2 - 3 - 2} = 3 - 1 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$ που ισχύει

Οπότε η ρίζα $x = 3$ γίνεται δεκτή

21.10 12)

Η εξίσωση ορίζεται όταν

$$2x^2 + 5x + 2 \geq 0 \Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 2} = x + 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 5x + 2}^2 = (x+2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

Και οι δύο ρίζες ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x = -2, \sqrt{2(-2)^2 + 5 + 2} = 2 - 2 \Rightarrow \sqrt{0} = 0 \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = -2$ γίνεται δεκτή

$$\text{Για } x = \frac{1}{2}, \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow \sqrt{5} = -\frac{1}{2} \text{ που δεν ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = \frac{1}{2}$ δεν γίνεται δεκτή

21.10 13)

Περιορισμοί : * $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε x , και

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(x - 2)^2} = 2x - 3 \Rightarrow |x - 2| = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{αφού } x \geq \frac{3}{2}$$

$$x - 2 = 3 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ δεκτή}$$

21.10 14)

Περιορισμοί : * $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ και

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$2x - 1 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = \boxed{3} \\ \searrow x_2 = \boxed{-1} \end{matrix} \text{ δεκτή}$$

$$x_2 = \boxed{-1} \text{ απορρίπτεται αφού πρέπει } x \in [2, +\infty)$$

21.10 15)

Η εξίσωση ορίζεται όταν

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{x^2 + 4x - 12} = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 12}^2 = \sqrt{2x + 3}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ή } x = 3$$

Η τιμή $x = -5$ απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τον περιορισμό.

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση για την $x = 3$

$$\text{Για } x = 3, \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3 - 12} = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} \Rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9} \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 3$ γίνεται δεκτή

Η εξίσωση ορίζεται όταν

$$x^2 + x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) \quad \text{και} \quad 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$$

Άρα πρέπει $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 5]$

Με τον περιορισμό αυτό υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο και έχουμε :

$$\sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{5 - x} \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2}^2 = \sqrt{5 - x}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 5 - x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ή } x = 1$$

Και οι δύο ρίζες ικανοποιούν τον περιορισμό

Τώρα θα κάνουμε επαλήθευση :

$$\text{Για } x = -3, \sqrt{(-3)^2 - 3 + 2} = \sqrt{5 - (-3)} \Rightarrow \sqrt{8} = \sqrt{8} \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = -3$ γίνεται δεκτή

$$\text{Για } x = 1, \sqrt{1^2 + 1 + 2} = \sqrt{5 - 1} \Rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \text{ που ισχύει}$$

Οπότε η ρίζα $x = 1$ γίνεται δεκτή