

19.8 1)

Καταρχήν παρατηρούμε ότι το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού. Οπότε έστω ότι είναι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Τώρα έχουμε $(x-3)P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \Rightarrow (x-3)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 3\alpha x^2 - 3\beta x - 3\gamma = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + (\beta - 3\alpha)x^2 + (\gamma - 3\beta)x - 3\gamma = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \Rightarrow$$

$$\text{ισότητα πολυωνύμων} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 3\alpha = -3 \\ \gamma - 3\beta = -4 \\ -3\gamma = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 3 \cdot 1 = -3 \\ -4 - 3\beta = -4 \\ \gamma = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -4 \end{cases} \quad \text{Επομένως είναι } P(x) = x^2 - 4$$

19.8 2)

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το $P(x)$ είναι 2^{ου} βαθμού.

Οπότε έστω ότι είναι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Τώρα έχουμε : $(x+2)P(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 + 5x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma = x^3 + 5x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + (\beta + 2\alpha)x^2 + (\gamma + 2\beta)x + 2\gamma = x^3 + 5x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\text{ισότητα πολυωνύμων} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2\alpha = 5 \\ \gamma + 2\beta = 5 \\ 2\gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Επομένως είναι $P(x) = x^3 + 3x - 1$

19.8 3)

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το $P(x)$ είναι 2^{ου} βαθμού.

Οπότε έστω ότι είναι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Τώρα έχουμε : $(x-4)P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-4)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 4\alpha x^2 - 4\beta x - 4\gamma = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x^3 + (\beta - 4\alpha)x^2 + (\gamma - 4\beta)x - 4\gamma = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 4 \Rightarrow$$

$$\text{ισότητα πολυωνύμων} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 4\alpha = -9 \\ \gamma - 4\beta = 5 \\ -4\gamma = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Επομένως είναι $P(x) = 2x^3 - x + 1$

19.8 4)

Καταρχήν παρατηρούμε ότι το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού. Οπότε έστω ότι είναι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Τώρα έχουμε $(2x-1)P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (2x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha x^3 + (2\beta - \alpha)x^2 + (2\gamma - \beta)x - \gamma = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\text{ισότητα πολυωνύμων} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta - \alpha = -\frac{1}{2} \\ 2\gamma - \beta = -2 \\ -\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ 2\beta - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ -2 - \beta = -2 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad \text{Επομένως είναι } P(x) = x^2 - 4$$

Επομένως είναι $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

19.8 5)

Καταρχήν παρατηρούμε ότι το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού. Οπότε έστω ότι είναι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Τώρα έχουμε $(2x+1)P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow (2x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 4x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 4x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha x^3 + (2\beta + \alpha)x^2 + (2\gamma + \beta)x + \gamma = 4x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\text{ισότητα πολυωνύμων} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 4 \\ 2\beta + \alpha = -2 \\ 2\gamma + \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\beta + 2 = -2 \\ 2 + \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{Επομένως είναι } P(x) = x^2 - 4$$

Επομένως είναι $P(x) = 2x^2 - 2x + 1$

19.8 6)

θα πρέπει το $P(x)$ να είναι πολυώνυμο 1^{ov} βαθμού, ώστε το γινόμενο του με το (x^2+1) , να

ισούται με πολυώνυμο 1^{ov} βαθμού.

Έστω λοιπόν $P(x) = \alpha x + \beta$ είναι :

$$5x^3 - 2x^2 = (x^2 + 1)(\alpha x + \beta) \Rightarrow 5x^3 - 2x^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x + \beta$$

Από ισότητα πολυωνύμων πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -2 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \text{αδύνατο}$$

Άρα δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ που να ικανοποιεί την σχέση της εκφώνησης.