

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

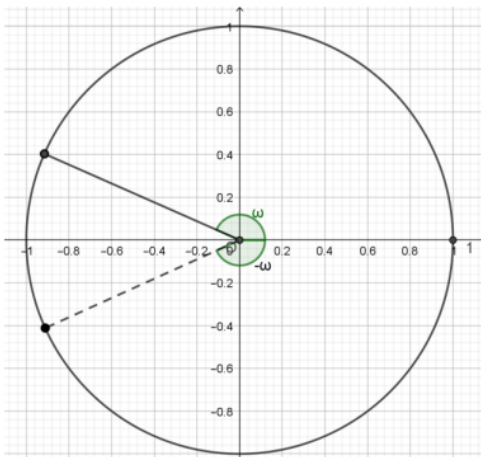
B. Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}$,

$$\text{έχουμε: } \eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega}.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα η γωνία $-\omega$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega) = -0,4$.

ΘΕΜΑ 3

Θέτουμε $y = \sigma\upsilon\nu x$ και η εξίσωση γράφεται :

$$4\sigma\upsilon\nu^2x - 2(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 4y^2 - 2(\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Delta &= 4(\sqrt{3}+1)^2 - 16\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1) - 16\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3}) = \\ &= 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1) = 4(\sqrt{3}-1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{και } y_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm 2(\sqrt{3}-1)}{8} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2\sqrt{3} + \cancel{2} + 2\sqrt{3} - \cancel{2}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{\cancel{2}\sqrt{3} + 2 - \cancel{2}\sqrt{3} + 2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

ή

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f , που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g , που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

$$\text{Άρα } \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2.$$

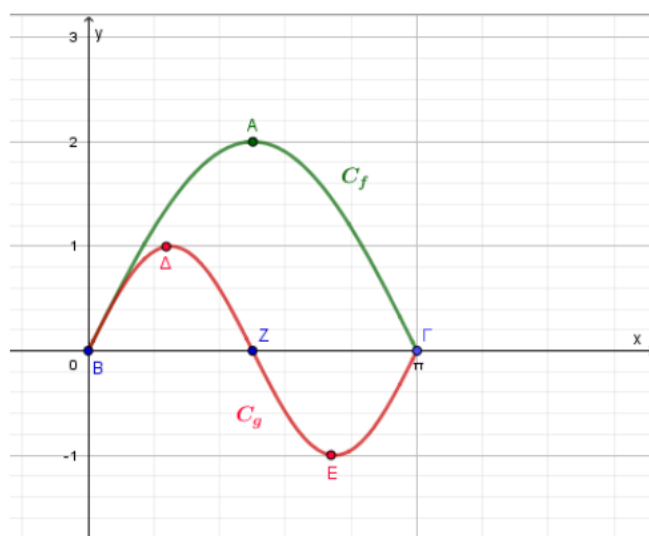
β) i. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \left(2 \cdot \frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\text{Είναι: } \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi.$$

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι