

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

B. Είναι:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0)$$

Επομένως:

$$\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Καθώς η συνάρτηση είναι της μορφής $g(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = \sqrt{2}$, $\omega = 1$, θα έχουμε:

i. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

ii. Η μέγιστη τιμή της είναι $|\rho| = \sqrt{2}$ και η ελάχιστη τιμή της $-|\rho| = -\sqrt{2}$.

$$\beta) f(2025\pi) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 1012 \cdot \pi + \pi) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = -\sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 3

Γνωρίζοντας την συνεφαπτομένη της γωνίας ω και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται (4°), μπορούμε να βρούμε όλους τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς

$$\text{Έχουμε: } \sigma\varphi\omega = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{3}\eta\mu\omega$$

Ακόμη

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{3}\eta\mu\omega\right)^2 = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega + \frac{16}{9}\eta\mu^2\omega = 1 \Rightarrow \frac{25\eta\mu^2\omega}{9} = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{3}{5} \stackrel{\omega \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)}{\Rightarrow} \eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Και } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{3}\eta\mu\omega = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Τέλος, για την εφαπτομένη έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Άρα η παράσταση γράφεται:

$$A = \frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 10 \cdot \frac{4}{5}}{4\epsilon\varphi(\pi - \omega) + 3\sigma\varphi(\pi + \omega)} = \frac{-3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{4 \cdot (-\epsilon\varphi\omega) + 3\sigma\varphi\omega} = \frac{-9 + 8}{4 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-1}{3 - 4} = 1$$

ΘΕΜΑ 4

α) Παρατηρούμε ότι αν $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x = \pm 1$, η εξίσωση δεν επαληθεύεται

Για $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, διαιρούμε την εξίσωση με $\sigma\upsilon\nu^2 x$ και έχουμε

$$\eta\mu^2 x - (\sqrt{3} - 1)\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x} - (\sqrt{3}-1)\frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2x} - \sqrt{3}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi^2x - (\sqrt{3}-1)\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$$

β) Θέτουμε $\varepsilon\varphi x = y$ και η εξίσωση γράφεται : $y^2 - (\sqrt{3}-1)y - \sqrt{3} = 0$

$$\text{Είναι } \Delta = (\sqrt{3}-1)^2 + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}+1)^2$$

$$\text{και } y_{1,2} = \frac{(\sqrt{3}-1) \pm (\sqrt{3}+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}-1 - \sqrt{3}+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

Άρα

$$y = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή



$$y = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$