

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 18.3

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

B. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \epsilon\phi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho, \omega > 0$ με $\rho = \frac{1}{2}$

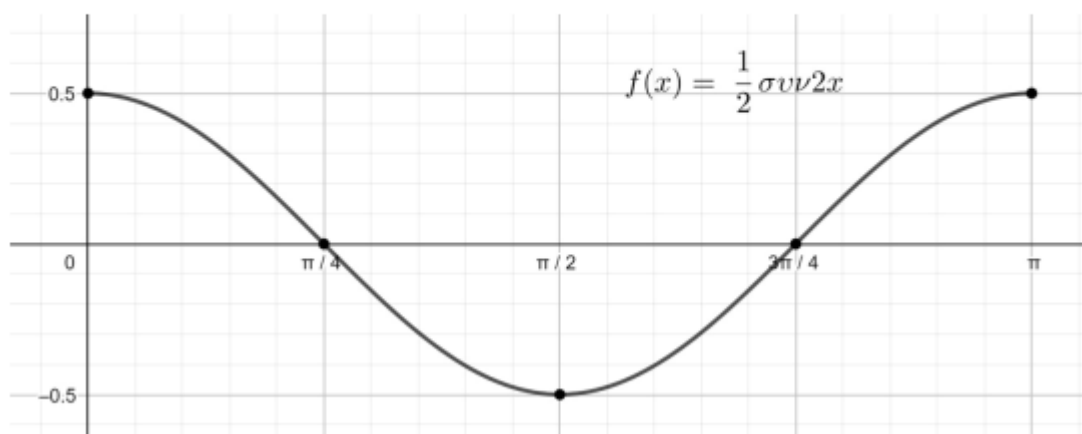
και $\omega = 2$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι $\frac{1}{2}$ και η ελάχιστη τιμή της είναι $-\frac{1}{2}$.

Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

β) Σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου, δηλαδή π , έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, \pi]$ δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ 3

Έχουμε ότι :

- $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 240^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$
- $\epsilon\varphi 330^\circ = \epsilon\varphi(360^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi(-30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}$

Άρα η παράσταση γράφεται :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - (-\sqrt{3}) =$$
$$= 1 + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4$$

ΘΕΜΑ 4

$$\alpha) \quad \beta' \text{ μέλος} = \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 \omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^2 \omega}} =$$
$$= \frac{1}{\frac{\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^2 \omega}} = \frac{\eta\mu^2 \omega}{\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega} = \eta\mu^2 \omega = \alpha' \text{ μέλος}$$

β) Υψώνουμε και τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη :

$$\bullet \quad (x\sigma\upsilon\nu\omega + y\eta\mu\omega)^2 = \frac{\alpha^2}{\eta\mu^2 \omega} \Rightarrow x^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega + 2xy\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + y^2 \eta\mu^2 \omega = \frac{\alpha^2}{\eta\mu^2 \omega}$$
$$\bullet \quad (x\eta\mu\omega - y\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \frac{\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^4 \omega} \Rightarrow x^2 \eta\mu^2 \omega - 2xy\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + y^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^4 \omega}$$

Άρα , προσθέτοντας κατά μέλη , παίρνουμε :

$$x^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega + 2xy\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + y^2 \eta\mu^2 \omega + x^2 \eta\mu^2 \omega - 2xy\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + y^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega =$$
$$= \frac{\alpha^2}{\eta\mu^2 \omega} + \frac{\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^4 \omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 (\sigma\upsilon\nu^2 \omega + \eta\mu^2 \omega) + y^2 (\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega) = \frac{\alpha^2}{\eta\mu^2 \omega} + \frac{\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^4 \omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 \eta\mu^2 \omega + \alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{\eta\mu^4 \omega} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{\eta\mu^4 \omega}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι :

$$\eta\mu^2 \omega = \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 \omega} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 \omega} = 1 + \sigma\varphi^2 \omega \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu^4 \omega} = (1 + \sigma\varphi^2 \omega)^2$$

Οπότε τελικά : $x^2 + y^2 = \alpha^2 \cdot (1 + \sigma\varphi^2 \omega)^2$