

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 18.1

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

B. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

$$x = \text{συν}\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$

Επειδή όμως,

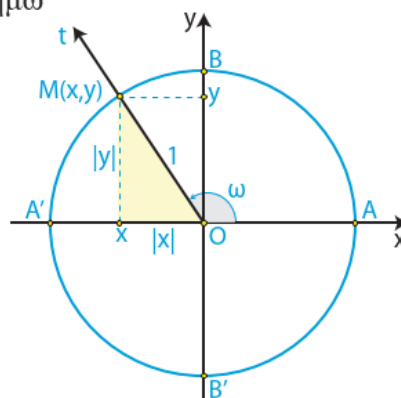
$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\text{συν}^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$



ΘΕΜΑ 2

α) Είναι : $\alpha' \text{ μέλος} = \eta\mu 476^\circ = \eta\mu(360^\circ + 116^\circ) = \eta\mu 116^\circ = \beta' \text{ μέλος}$

β) Αρχικά η γωνία 116° βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο, άρα το συνημίτονο θα είναι αρνητικό

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } \eta\mu^2 116^\circ + \text{συν}^2 116^\circ = 1 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \text{συν}^2 116^\circ = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{συν}^2 116^\circ = \frac{19}{100} \Rightarrow \text{συν} 116^\circ = \pm \frac{\sqrt{19}}{10} \xrightarrow{\text{συν} 116^\circ < 0} \text{συν} 116^\circ = -\frac{\sqrt{19}}{10}$$

ΘΕΜΑ 3

$$\alpha' \text{ μέλος} = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} + \frac{1}{1 + \sigma\phi^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\text{συν}^2 x}} + \frac{1}{1 + \frac{\text{συν}^2 x}{\eta\mu^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\text{συν}^2 x + \eta\mu^2 x}{\text{συν}^2 x}} + \frac{1}{\frac{\eta\mu^2 x + \text{συν}^2 x}{\eta\mu^2 x}} = \frac{\text{συν}^2 x}{\text{συν}^2 x + \eta\mu^2 x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x + \text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \eta\mu^2 x}{\text{συν}^2 x + \eta\mu^2 x} = 1 = \beta' \text{ μέλος}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α , άρα $\alpha = 2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x = 2$, πρέπει

$$\alpha = 2$$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (η λύση } \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα

είναι όταν ο κ , ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται

αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 8$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2 \cdot \eta\mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \\ x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{i) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{23}{48} &\Leftrightarrow -\frac{4}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{\pi}{48} \text{ rad}$ ή

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48} \text{ rad}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow \\ -\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{19}{48} &\Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}. \end{aligned}$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} \text{ rad}$ ή

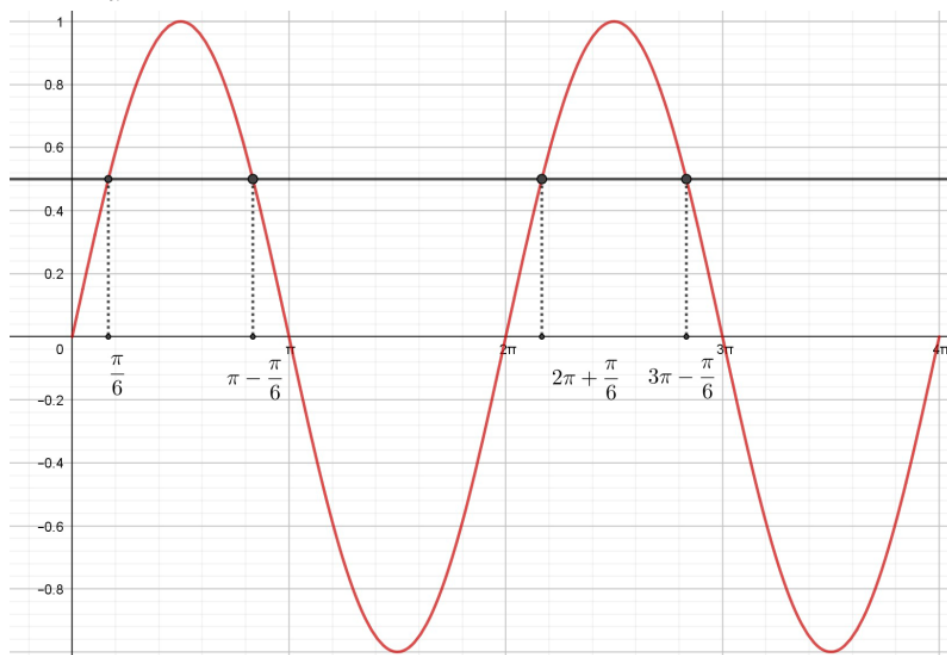
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} \text{ rad}.$$

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0 \leq 8x \leq 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της

συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$$

$$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$$

$$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$$

$$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}.$$