

16.16 1)

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τώρα όμως πρέπει να βρούμε τις τιμές του **ακεραίου** κ ώστε οι παραπάνω λύσεις να ανήκουν στο διάστημα $[0, 3\pi]$ δηλαδή να βρούμε τις τιμές του **ακεραίου** κ ώστε $x \in [0, 3\pi] \Rightarrow 0 \leq x \leq 3\pi$. Έτσι

$$\begin{aligned} \text{για } x &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq x &\leq 3\pi \\ \Rightarrow 0 &\leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq 6\kappa\pi + \pi \leq 9\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &\leq (6\kappa + 1)\pi \leq 8\pi \Rightarrow 0 \leq 6\kappa + 1 \leq 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 &\leq 6\kappa \leq 7 \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq \frac{6\kappa}{6} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{7}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \text{για } \kappa = 0 &\Rightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \text{για } \kappa = 1 &\Rightarrow x = 2 \cdot 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{για } x &= 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq x &\leq 3\pi \\ \Rightarrow 0 &\leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq 6\kappa\pi - \pi \leq 9\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &\leq (6\kappa - 1)\pi \leq 8\pi \Rightarrow 0 \leq 6\kappa - 1 \leq 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &\leq 6\kappa \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{6\kappa}{6} \leq \frac{9}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \kappa = 1$$

Οπότε

$$\text{για } \kappa = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 \cdot \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 3\pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ και $\frac{7\pi}{3}$

16.16 2)

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τώρα όμως πρέπει να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε οι παραπάνω λύσεις να ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$, δηλαδή να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε :

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\pi$$

Έτσι :

$$\begin{aligned} \text{Για } x &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq x &\leq 2\pi \\ \Rightarrow 0 &\leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{4} &\leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{4} \\ \Rightarrow -\frac{1}{8} &\leq \kappa \leq \frac{7}{8} \\ \text{Όμως} \\ \left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ -\frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{7}{8} \end{array} \right\} &\kappa = 0 \\ \text{οπότε } x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x &= 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq x &\leq 2\pi \\ \Rightarrow 0 &\leq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \leq 2\pi \\ \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} &\leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{4} \\ \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} &\leq 2\kappa \leq \frac{5\pi}{8} \\ \Rightarrow -\frac{3}{8} &\leq \kappa \leq \frac{5}{8} \\ \text{Όμως} \\ \left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ -\frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{5}{8} \end{array} \right\} &\kappa = 0 \\ \text{οπότε } x &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{3\pi}{4}$

16.16 3)

$$\varepsilon\phi x = -\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τώρα όμως πρέπει να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε οι παραπάνω λύση να ανήκει στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$, δηλαδή να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε :

$$x \in [\pi, 3\pi] \Rightarrow \pi \leq x \leq 3\pi$$

Έτσι :

$$\text{Για } x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \pi \leq \kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \leq 3\pi \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{7}{3}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ \frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{7}{3} \end{array} \right\} \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 2$$

$$\text{οπότε για } \kappa = 1 \Rightarrow x = 1 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{για } \kappa = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$ είναι οι $\frac{5\pi}{3}$ και $\frac{8\pi}{3}$

16.16 4)

$$\sigma\phi x = 1 \Rightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τώρα όμως πρέπει να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε οι παραπάνω λύση να ανήκει στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, δηλαδή να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε :

$$x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow -\pi \leq x \leq \pi$$

Έτσι :

$$\text{Για } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ -\frac{5}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4} \end{array} \right\} \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0$$

$$\text{οπότε για } \kappa = -1 \Rightarrow x = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{για } \kappa = 0 \Rightarrow x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ είναι οι $-\frac{3\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{4}$

16.16 5)

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$

Τώρα όμως πρέπει να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε οι παραπάνω λύσεις να ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$, δηλαδή να βρούμε τις τιμές του ακεραίου κ ώστε :

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\pi$$

Έτσι :

$$\text{Για } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\stackrel{0 \leq x \leq 2\pi}{\Rightarrow} 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \end{array} \right\} \kappa = 0$$

$$\text{οπότε } \kappa = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

ή

$$\text{Για } x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\stackrel{0 \leq x \leq 2\pi}{\Rightarrow} 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{17\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{17}{12}$$

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \text{ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος} \\ \frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{17}{12} \end{array} \right\} \kappa = 1$$

$$\text{οπότε } \kappa = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 \cdot \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{5\pi}{6}$ και $\frac{7\pi}{6}$