

20.13 1)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 3$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = -1, \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.13 2)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 6x + 5$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 6\xi + 5 = 0, \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι } \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -24 < 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.13 3)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = -6x^2 + 10x - 6$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -6\xi^2 + 10\xi - 6 = 0, \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι } \Delta = 100 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = -44 < 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.13 4)

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[ρ_1, ρ_2]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο $(ρ_1, ρ_2)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2 + \sin x$
- $\left. \begin{matrix} f(ρ_1) = 0 \\ f(ρ_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(ρ_1) = f(ρ_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[ρ_1, ρ_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (ρ_1, ρ_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2 + \sin \xi = 0 \Rightarrow \sin \xi = -2 \quad \boxed{\text{άτοπο}}$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.13 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 12x + 5$, $x \in (-2, 2)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες $ρ_1$ και $ρ_2$, έστω $ρ_1 < ρ_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[ρ_1, ρ_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(ρ_1, ρ_2)$, ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 12$
- $\left. \begin{matrix} f(ρ_1) = 0 \\ f(ρ_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(ρ_1) = f(ρ_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[ρ_1, ρ_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (ρ_1, ρ_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3\xi^2 = 12 \Rightarrow \xi^2 = 4 \Rightarrow \xi = \pm 2 \quad , \quad \boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι} \quad \xi \in (-2, 2)$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

20.13 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, $x \in (1, 2)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες $ρ_1$ και $ρ_2$, έστω $ρ_1 < ρ_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[ρ_1, ρ_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(ρ_1, ρ_2)$, ως πολωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$
- $\left. \begin{matrix} f(ρ_1) = 0 \\ f(ρ_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(ρ_1) = f(ρ_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[ρ_1, ρ_2]$ και επομένως υπάρχει $\rho \in (ρ_1, ρ_2)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{array}{l} \rho^2 - 3\rho + 2 = 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = \frac{3+1}{2} \Rightarrow \rho_1 = 2 \\ \rho_2 = \frac{3-1}{2} \Rightarrow \rho_2 = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 3\rho + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 1 \quad \text{ή} \quad \rho_2 = 2 \quad ,$$

$$\boxed{\text{άτοπο}} \quad \text{διότι} \quad \rho \in (ρ_1, ρ_2) \stackrel{\rho_1, \rho_2 \in (1, 2)}{\Rightarrow} \rho \in (1, 2)$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1, 2)$ που σημαίνει ότι υπάρχει το πολύ ένα

$$\xi \in (1, 2) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad 2\xi^3 - 9\xi^2 + 12\xi + 1 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta$, $x \in (0,1)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πολωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 6x$
- $\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 6\xi^2 - 6\xi = 0 \Rightarrow 6\xi(\xi - 1) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ ή } \xi = 1, \text{ [άτοπο] διότι}$$

$$\xi \in (\rho_1, \rho_2) \stackrel{\rho_1, \rho_2 \in (0,1)}{\Rightarrow} \xi \in (0,1)$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x$, $x \in (0, \pi)$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , έστω $\rho_1 < \rho_2$. Τότε

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -\eta\mu x - 1$

$$\left. \begin{matrix} f(\rho_1) = 0 \\ f(\rho_2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi - 1 = 0 \Rightarrow \eta\mu\xi = -1, \text{ [άτοπο] διότι}$$

$$\xi \in (\rho_1, \rho_2) \stackrel{\rho_1, \rho_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \xi \in (0, \pi) \Rightarrow \eta\mu\xi > 0$$

άρα η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, \pi)$