

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

B. Έστω $M(x, y)$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ και } \overrightarrow{OM} = (x, y), \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$$

$$\text{Άρα έχουμε: } (x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\text{Επομένως ισχύει: } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

$$\alpha) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA}| \cdot \cos(\hat{A}) = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$\beta) \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{BG} = |\overrightarrow{AA}| \cdot |\overrightarrow{BG}| \cdot \cos(\hat{AAG}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 0 = 16$$

$$\gamma) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\hat{OAO}) = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot 0 = 0$$

$$\delta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\hat{AOB}) = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$$

$$\epsilon) \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{GA} = |\overrightarrow{AA}| \cdot |\overrightarrow{GA}| \cdot \cos(\hat{AAG}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

ΘΕΜΑ 3

$$\alpha) \text{ Έχουμε: } \begin{cases} \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{\alpha}) + \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{\beta}) = \vec{x} + \frac{1}{3}\vec{\beta} \\ \frac{1}{3}(\vec{y} - \vec{\alpha}) - \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{\beta}) = \frac{2}{3}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τα $\vec{x}, \vec{y}$,

βρίσκουμε $\vec{x} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{y} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

$$\beta) \text{ Είναι } \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\vec{\alpha})^2 - \vec{\beta}^2 = 0 \Rightarrow 4|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ Οπότε θα είναι:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right), \quad \Lambda\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right), \quad K\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$\text{Οπότε έχουμε: } \overrightarrow{ML} = \left(\frac{x_3 - x_2}{2}, \frac{y_3 - y_2}{2}\right) / \overrightarrow{BK} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$$

$$\text{Επίσης } \overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ και } \overrightarrow{KL} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

Όμως $x_1 = 0$, $y_2 = 0$

Άρα $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{KL} = \left(\frac{-x_2}{2}, \frac{-y_2}{2}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{KL}|$

Αφού $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{KL}|$ και $\overrightarrow{ML} // \overrightarrow{BG}$, το OKΛM είναι ισοσκελές τραπέζιο