

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

B. Ευθύ: Έστω $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, οπότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$
- Αν $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει λ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

Αντίστροφα: Έστω $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

Αν $\lambda > 0$, τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta}$

Αν $\lambda < 0$, τότε $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta}$

Αν $\lambda = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 2

α) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$

$$\vec{AG} = \vec{OG} - \vec{OA} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = 12\vec{\alpha} + 6\vec{\beta} + 9\vec{\gamma}$$

β) Είναι $\vec{AG} = 3\vec{AB} \Rightarrow \vec{AG} // \vec{AB}$ επομένως τα σημεία A, B, Γ, είναι συνευθειακά

ΘΕΜΑ 3

α) Έστω $\Delta(x, y)$ είναι :

$$\vec{B\Delta} = 3\vec{BE} \Rightarrow (x-13, y-9) = (-12, -6) \Rightarrow \begin{cases} x-13 = -12 \\ y-9 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Άρα είναι $\Delta(1, 3)$

β) Έστω $\Gamma(x, y)$

Το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα είναι:

$$\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \Rightarrow (13-3, 9-11) = (x-1, y-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10, -2) = (x-1, y-3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 10 \\ y-3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα είναι $\Gamma(11, 1)$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{AE} // \vec{EM}$

Βρίσκουμε πρώτα τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΒΓ :

$$\text{Είναι } M\left(\frac{13+11}{2}, \frac{9+1}{2}\right) \Rightarrow M(12, 5)$$

$$\text{Άρα έχουμε } \vec{AE} = (9-3, 7-11) = (6, -4)$$

$$\text{Και } \vec{EM} = (12-9, 5-7) = (3, -2)$$

$$\text{Είναι } \vec{AE} = 2\vec{EM} \Rightarrow \vec{AE} // \vec{EM}$$

Επομένως τα σημεία A, E, Μ είναι συνευθειακά

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε :

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{GL}^2 - \overrightarrow{LA}^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OG})^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OL})^2 = \\ &= \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OG}^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OL}^2 - 2\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}^2 - \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OL}^2 = \\ &= 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OL} - 2\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OG} = \\ &= 2\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) + 2\overrightarrow{OL}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) = \\ &= 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL}) = 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{LB} = \beta' \text{ μέλος}\end{aligned}$$