

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

B. Έστω $O(0,0)$ έχουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ με $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ΘΕΜΑ 2

α) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = 1 \Rightarrow \omega_1 = 45^\circ$

$$\lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega_2 = 150^\circ$$

β) $\left(\vec{\alpha}^\wedge \vec{\beta} \right) = 150^\circ - 45^\circ \Rightarrow 105^\circ$

ΘΕΜΑ 3

α) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \vec{\alpha} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma}) =$
 $= \vec{\alpha} + \frac{1}{3}(-\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \frac{2}{3}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$

β) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma}) + \overrightarrow{\Gamma E} =$
 $= \frac{2}{3}(-\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + 2\vec{\alpha} = \frac{4}{3}\vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$

γ) Είναι $\overrightarrow{\Delta E} = 2\overrightarrow{A\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{A\Delta}$
 Επομένως τα σημεία A, Δ, E είναι συνευθειακά

ΘΕΜΑ 4

α) Αρχικά είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 20$

$$\text{Έχουμε επίσης } \begin{cases} |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 5 \\ |\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}| = 10\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 25 \\ |\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 36|\vec{\beta}|^2 = 200 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα (με αγνώστους τα $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|^2$, αφού $|\vec{\alpha}|^2 = 20$, γνωστό) και βρίσκουμε:

$$\begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ |\vec{\beta}|^2 = 200 \end{cases} \quad \text{άρα } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

β) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, άρα αν είναι $\vec{\beta} = (x, y)$ έχουμε $-4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$$\text{Επίσης } |\vec{\beta}|^2 = 200 \Rightarrow x^2 + y^2 = 200 \Rightarrow x^2 + (2x)^2 = 200 \Rightarrow$$

$$\text{Άρα είναι } \vec{\beta} = (2\sqrt{10}, 4\sqrt{10}) \text{ ή } \vec{\beta} = (-2\sqrt{10}, 4\sqrt{10})$$

