

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

B. Έστω $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= \vec{\alpha} \cdot [(\beta_1, \beta_2) + (\gamma_1, \gamma_2)] = \vec{\alpha} \cdot (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2) = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (1, 3) \cdot (3, -1) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0$

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ άρα $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 90^\circ$

β) $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1, 3) - (3, -1) = (2, 6) - (3, -1) = (-1, 7)$

ΘΕΜΑ 3

α) Το Δ είναι μέσο του AB, άρα έχει συντεταγμένες $\Delta \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{2-6}{2} \right) \Rightarrow \Delta(4, -2)$

Το M είναι μέσο του ΓΔ, άρα αν είναι $\Gamma(x, y)$ έχουμε

$$(3, -3) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right) \Rightarrow x = 2, y = -4 \text{ άρα είναι } \Gamma(2, -4)$$

Επίσης $BE = EZ = Z\Gamma$

Άρα, αν (x, y) είναι $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{B\Gamma} \Rightarrow (x+1, y-2) = \frac{1}{3}(2-(-1), -4-2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+1, y-2) = (1, -2) \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ άρα είναι } E(0, 0)$$

Όμοια, $\overline{GZ} = \frac{1}{3}\overline{GB}$ Άρα αν $Z(x, y)$ έχουμε $(x-2, y+4) = \frac{1}{3}(-1-2, 2-(-4)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-2, y+4) = (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x-2=-1 \\ y+4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ άρα είναι } Z(1, -2)$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{AH} // \overline{HZ}$

Είναι $\overline{AH} = (3-9, -3-(-6)) = (-6, 3)$ και $\overline{HZ} = (1-3, -2-(-3)) = (-2, 1)$

Είναι $\overline{AH} = 3\overline{HZ} \Rightarrow \overline{AH} // \overline{HZ}$ επομένως τα σημεία A, H, Z είναι συνευθειακά

γ) Είναι $\overline{DE} = (0-4, 0-(-2)) = (-4, 2)$ και $\overline{ZH} = (3-1, -3-(-2)) = (2, -1)$

Άρα $\overline{DE} = -2 \cdot \overline{ZH} \Rightarrow \overline{DE} // \overline{ZH}$

ΘΕΜΑ 4

α) Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (1 - |\vec{\beta}|) \cdot 1 + 1 \cdot (|\vec{\alpha}| - 1) \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 - |\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}| - 1 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$

β) Έχουμε

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 1} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \sqrt{|\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 2}^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 2 \quad (1)$$

και

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{1 + |\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}| + 1} \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = \sqrt{|\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}| + 2}^2 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}| + 2 \stackrel{|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \cancel{|\vec{\beta}|^2} = \cancel{|\vec{\beta}|^2} - 2|\vec{\beta}| + 2 - 2|\vec{\alpha}| + 2 \Rightarrow 2|\vec{\beta}| + 2|\vec{\alpha}| = 4 \stackrel{\text{διαιρούμε με 2}}{\Rightarrow} |\vec{\beta}| + |\vec{\alpha}| = 2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 2 - |\vec{\beta}| \quad (2)$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 2 \stackrel{|\vec{\alpha}| = 2 - |\vec{\beta}|}{\Rightarrow} (2 - |\vec{\beta}|)^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 2 \Rightarrow 4 - 4|\vec{\beta}| + \cancel{|\vec{\beta}|^2} = \cancel{|\vec{\beta}|^2} - 2|\vec{\beta}| + 2 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 1$$

και

$$(2) \Rightarrow \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 2 - 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 1$$

$$\text{Επομένως από το α) ερώτημα έχουμε } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 - 1 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$