

6.Γ1

Θεωρούμε κατάλληλο σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha > \gamma$). Τότε είναι

$$E\left(\frac{\gamma+0}{2}, \frac{\beta+0}{2}\right) = E\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

και

$$Z\left(\frac{\alpha+0}{2}, \frac{\beta+0}{2}\right) = E\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

Τότε είναι

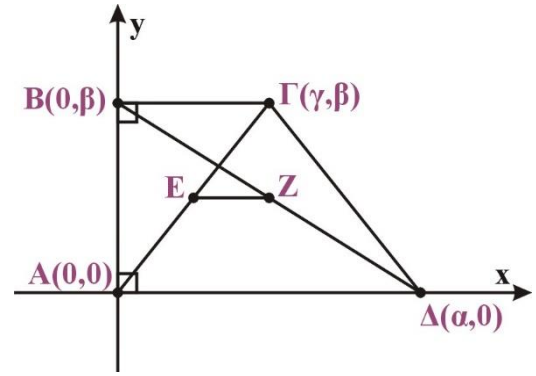
$$(ΓΔ) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{\beta^2} = \beta$$

$$(EZ) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)^2} = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \Gamma\Delta^2 &= AB^2 + 4EZ^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}^2 = \beta^2 + 4\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\gamma - \alpha)^2 + \cancel{\beta^2} = \cancel{\beta^2} + \cancel{4} \frac{(\alpha - \gamma)^2}{\cancel{4}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\gamma - \alpha)^2 = (\alpha - \gamma)^2 \quad \text{που ισχύει} \end{aligned}$$



6.Γ2

α) Έστω ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow (3, 6) = \lambda(x, 2x + 1) \Rightarrow (3, 6) = (\lambda x, 2\lambda x + \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x = 3 \\ 2\lambda x + \lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\lambda} \\ 2\lambda \cdot \frac{3}{\lambda} + \lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \mathbb{R} \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Συνεπώς τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα

β) Πρέπει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3, 6) + (x, 2x + 1) + (3x - y, 4x + y) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x - y + 3, 7 + 6x + y) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ 7 + 6x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 3 \\ 7 + 6x + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

6.Γ3

Είναι $\vec{OG} = (-2, 3)$ και $\vec{AD} = (-5, 2)$ και $\vec{BF} = (1, 4)$

Θέλουμε $\vec{BF} = \kappa \vec{OG} + \lambda \vec{AD}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (1, 4) = \kappa(-2, 3) + \lambda(-5, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1, 4) = (-2\kappa, 3\kappa) + (-5\lambda, 2\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1, 4) = (2\kappa - 5\lambda, 3\kappa + 2\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\kappa - 5\lambda = -1 \\ 3\kappa + 2\lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα είναι } \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta}$$

6.Γ4

Αφού $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, θα είναι :

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot 2\vec{\alpha} - |\vec{\beta}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 0 \quad (1)$$

Και αφού $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, θα είναι :

$$(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow 3|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3|\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Έστω } |\vec{\alpha}|^2 = x, |\vec{\beta}|^2 = y \text{ και } |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = z$$

Τότε έχουμε το < σύστημα > των (1), (2):

$$\begin{cases} 2x + z - y = 0 \\ 3x - 2z - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ 3x - 2z - (2x + z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ 3x - 2z - 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x = 3z \end{cases}$$

$$\text{Άρα : η (1) : } 2x + z - y = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3z + z - y = 0 \Rightarrow y = 7z$$

$$\text{Έχουμε όμως ότι : } \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{z}{\sqrt{x} \sqrt{y}} = \frac{z}{\sqrt{3z} \cdot \sqrt{7z}} =$$

$$= \frac{z}{z \cdot \sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$$

6.Γ5

$$\text{Είναι } \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = (4, 3) + (-2, -5) = (2, -2)$$

$$\text{και } \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = (6, 1) - (4, 3) = (2, -2)$$

Άρα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ δηλαδή το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

6.Γ6

$$\text{Είναι } M\left(\frac{0+2\alpha}{2}, \frac{2\beta+2\beta}{2}\right) \Rightarrow M(\alpha, 2\beta)$$

$$K\left(\frac{2\alpha}{2}, 0\right) \Rightarrow \kappa(\alpha, 0)$$

$$\Lambda\left(\frac{2\alpha+2\alpha}{2}, \frac{2\beta+0}{2}\right) \Rightarrow \Lambda(2\alpha, \beta)$$

$$N\left(\frac{0+0}{2}, \frac{2\beta+0}{2}\right) \Rightarrow N(0, \beta)$$

$$\text{Άρα έχουμε } \overrightarrow{ML} = (\alpha, -\beta) \Rightarrow |\overrightarrow{ML}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{και } \overrightarrow{LK} = (-\alpha, -\beta) \Rightarrow |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\overrightarrow{KN} = (-\alpha, \beta) \Rightarrow |\overrightarrow{KN}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\overrightarrow{NM} = (\alpha, \beta) \Rightarrow |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Οπότε το MΛΚΝ είναι ρόμβος, αφού έχει όλες του τις πλευρές ίσες

6.Γ7

Το ABΓ είναι τρίγωνο, επομένως $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$

Επίσης τα ABΔΕ , ΑΓΖΗ , ΒΓΘΚ είναι παραλληλόγραμμα

Άρα $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GZ}$, $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{ΘΓ}$

Οπότε έχουμε: $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{ZΘ} + \overrightarrow{KΔ} =$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ZI} + \overrightarrow{ΓΘ} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BΔ} =$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AH} + (-\overrightarrow{AH}) + (-\overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{KB} + (-\overrightarrow{EA}) = \vec{0}$$