5.43

Έχουμε : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2\Rightarrow$

$$\Rightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=-2\Rightarrow$$

$$\overset{|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1}{\Rightarrow}\ \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=-2$$

Επειδή όμως $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\geq-1$ και $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)\geq-1$

αναγκαστικά $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)\geq-2$

ενώ για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει :

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-1 \quad \text{και} \quad \text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=-1$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \qquad \text{και} \qquad \vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$$

Επίσης είναι μοναδιαία , άρα έχουν ίσα και τα μέτρα τους (ίσα με 1)

Οπότε $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$