

Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

5.31 1)

Θεωρούμε ένα σημείο σταθερό π.χ. το Α και γράφουμε όλα τα διανύσματα με την βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων με σημείο αναφοράς το Α)

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma}) + \overrightarrow{A\Gamma}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta}) + \overrightarrow{A\Delta}(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}) = \\ &= \cancel{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} - \cancel{\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta}} + \cancel{\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}} - \cancel{\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AB}} = 0 = \beta' \text{ μέλος}\end{aligned}$$

5.31 2)

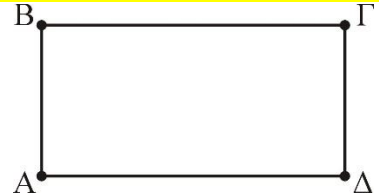
$$\alpha' \text{ μέλος} = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{K\Gamma} = (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}) =$$

$$= \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} \stackrel{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{=} =$$

$$= \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} =$$

$$= \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}(\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{BA}) \stackrel{\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{AB}}{=} \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) \stackrel{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}}{=} =$$

$$= \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \cdot \overrightarrow{AA} \stackrel{\overrightarrow{\Delta\Gamma} \perp \overrightarrow{AA} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} \cdot \overrightarrow{AA} = 0}{=} \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} + 0 = \overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{K\Delta} = \beta' \text{ μέλος}$$



5.31 3)

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}) + \overrightarrow{O\Gamma}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OA} = \\ &= 0 = \beta' \text{ μέλος}\end{aligned}$$

5.31 4)

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{A\Gamma}^2 = (\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B})^2 - (\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma})^2 = \\ &= \overrightarrow{A\Delta}^2 + 2\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Delta B}^2 - \overrightarrow{A\Delta}^2 - 2\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 = \\ &\stackrel{|\overrightarrow{\Delta\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{\Delta B}|^2}{=} 2\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta B} - 2\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2(-\overrightarrow{\Delta A}) \cdot \left(-\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2}\right) - 2(-\overrightarrow{\Delta A}) \cdot \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2} = \\ &= \overrightarrow{\Delta A} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta A} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta A} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \beta' \text{ μέλος}\end{aligned}$$

5.31 5)

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{B\Gamma}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B\Gamma}) = \overrightarrow{A\Gamma}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B}) = \\ &\stackrel{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}}{=} \overrightarrow{A\Gamma} \cdot (\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}) = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta B} = (-\overrightarrow{\Gamma A})(-\overrightarrow{B\Delta}) = \\ &= \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = \beta' \text{ μέλος}\end{aligned}$$

5.31 6)

$$\begin{aligned}\alpha' \text{ μέλος} &= \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma Z} = \\ &= \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right) - \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2}\right) + \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}}{2}\right) =\end{aligned}$$

$$= \frac{\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AG}}{2} - \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BA}}{2} - \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GB}}{2} =$$

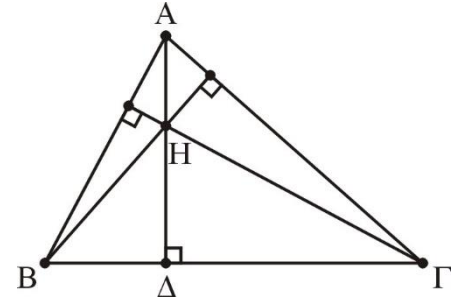
$$= 0 = \beta' \text{ μέλος}$$

5.31 7)

Είναι $\sin \hat{A} = \frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AB}$ (από ορθογώνια τρίγωνα)

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \sin \hat{A} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AG}|} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}|$$

$$\text{και } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \sin \hat{A} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$$



5.31 8)

Γράφουμε τα διανύσματα του πρώτου μέλους με σημείο αναφοράς το A :

$$H\vec{G}^2 - H\vec{B}^2 = A\vec{G}^2 - A\vec{B}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH})^2 = A\vec{G}^2 - A\vec{B}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 - 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AH}^2 = A\vec{G}^2 - A\vec{B}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$$

που ισχύει , γιατί $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{GB}$, επειδή το H είναι ορθόκεντρο

5.31 9)

Γράφουμε όλα τα διανύσματα με σημείο αναφοράς το Δ

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} - (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DG}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{AD}^2} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DG} + \cancel{\overrightarrow{AD}^2} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GD} - 0 - 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

(Είναι $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB}$ και $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DG}$ γιατί το AD είναι ύψος , άρα $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DG}$)