

5.30 1)

Έστω $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \kappa$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} &= \vec{\alpha} \cdot \left[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \vec{\beta} \right] \stackrel{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \kappa, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \lambda}{=} \vec{\alpha} \cdot (\kappa \vec{\gamma} - \lambda \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\kappa \vec{\gamma}) - \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \\ &= \kappa (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) - \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \stackrel{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \kappa, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \lambda}{=} \kappa \lambda - \kappa \lambda = 0 \end{aligned}$$

Επομένως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\delta}$

5.30 2)

Έστω $\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \kappa$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι:

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{\beta} \cdot \left[\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}}{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}} \vec{\gamma} \right] = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - \frac{\kappa \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{\lambda} = \kappa - \frac{\kappa \cdot \lambda}{\lambda} = \kappa - \kappa = 0$$

Επομένως $\vec{\beta} \cdot \vec{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} \perp \vec{\varepsilon}$

5.30 3)

Έστω $\vec{x} \cdot \vec{y} = \kappa$, $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι:

$$\vec{x} \cdot \left(\vec{y} - \frac{\vec{x} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})}{|\vec{x}|^2} \right) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{\vec{x}^2 (\vec{x} \cdot \vec{y})}{|\vec{x}|^2} = \kappa - \frac{\lambda \cdot \kappa}{\lambda} = \kappa - \kappa = 0$$

$$\text{Επομένως } \vec{x} \cdot \left(\vec{y} - \frac{\vec{x} (\vec{x} \cdot \vec{y})}{|\vec{x}|^2} \right) = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \left(\vec{y} - \frac{\vec{x} (\vec{x} \cdot \vec{y})}{|\vec{x}|^2} \right)$$