

5.28 1)

Η άσκηση , χρησιμοποιώντας ορολογία από την φυσική , στην ουσία ζητάει να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σαν άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ (στην φυσική αυτό σημαίνει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες) τα οποία όμως πρέπει

- να είναι κάθετα μεταξύ τους (δηλαδή $\vec{\gamma} \perp \vec{\delta}$)
- ένα από αυτά να είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha} = (3, 5)$ (δηλαδή π.χ. $\vec{\gamma} // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

Επομένως έχουμε $\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ και ακόμη

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \xrightarrow{\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\delta} \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } \vec{\alpha}} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \xrightarrow{\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 0} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19 \cdot 3 + 9 \cdot 5 = \lambda \sqrt{3^2 + 5^2}^2 \Rightarrow 102 = 34\lambda \Rightarrow \lambda = 3$$

Οπότε $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 3\vec{\alpha}$ και ακόμη

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = 3\vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{\beta} - 3\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\delta} = (19, 9) - 3(3, 5) \Rightarrow \vec{\delta} = (19, 9) - (9, 15) \Rightarrow \vec{\delta} = (10, -6)$$

Τελικά έχουμε $\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = 3\vec{\alpha} + (10, -6)$

5.28 2)

Έστω $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ οι δύο συνιστώσες, με $\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = 0$

και $\vec{\gamma} // \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda(2, 3) \Rightarrow \vec{\gamma} = (2\lambda, 3\lambda)$

Επομένως έχουμε:

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \Rightarrow$$

$$\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow 2(-14) + 3 \cdot 18 = \lambda \sqrt{2^2 + 3^2}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -28 + 54 = 13\lambda \Rightarrow 26 = 13\lambda \Rightarrow \lambda = 2$$

Οπότε $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$

$$\text{και ακόμη } \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha} = (-14, 18) - 2(2, 3) = (-14, 18) - (4, 6) = (-18, 12)$$

Οπότε έχουμε τελικά $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha} + (-18, 12)$

5.28 3)

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \xrightarrow{\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 0} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2$$

$$\Rightarrow 2(-34) - 10 \cdot 22 = \lambda \sqrt{8^2 + 10^2}^2 \Rightarrow -492 = 164\lambda \Rightarrow \lambda = -3$$

Οπότε $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = -3\vec{\alpha}$

$$\text{και ακόμη } \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = -3\vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{\beta} + 3\vec{\alpha} = (-34, 22) + 3(8, -10) = (10, -8)$$

τελικά $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha} + (10, -8)$

5.28 4)

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \Rightarrow$$

$$\vec{\gamma} \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} / \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \left| \vec{\alpha} \right|^2 \Rightarrow (-14) \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = \lambda \sqrt{3^2 + 1^2}^2 \Rightarrow 40 = 10\lambda \Rightarrow \lambda = 4$$

Οπότε $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\gamma} = 4\vec{\alpha}$

και ακόμη $\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\beta} = 4\vec{\alpha} + \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{\beta} - 4\vec{\alpha} = (-14, -2) - 4(-3, 1) = (-2, -6)$

Οπότε έχουμε τελικά $\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} + (-2, -6)$