5.26 1)

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{A\Delta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)=$$

$$\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AE}\overset{\substack{\overrightarrow{\Gamma A}\perp\overrightarrow{AE}=0\Rightarrow\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{A\Delta}\perp\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}=0}}{=}\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AE}=$$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{BA}}\right)+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AE}}\right)=$$

$$\overset{\substack{\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{BA}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{AB}}\right)\\ \left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AE}}\right)=180^o-\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AE}}\right)=\sigma\upsilon\nu\left[180^o-\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)\right]\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AE}}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)\\ \left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\quad\kappa\alpha\iota\quad\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|}}{=}0.$$

Οπότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{BE}=0\Rightarrow\Gamma\Delta\perp BE$

5.26 2)

$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=$$

$$=\left|\overrightarrow{\Delta B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta B},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)+\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu120^o+\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu0^o=$$

$$=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=0$$

Οπότε $\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\Delta E}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$

5.26 3)

$$\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AN}\right)\cdot\left(\overrightarrow{N\Delta}+\overrightarrow{\Delta M}\right)=\overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=$$

$$=\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{N\Delta}+\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{\Delta M}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{N\Delta}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{\Delta M}=$$

$$\underset{AN\perp\Delta M}{\overset{KA\perp N\Delta}{=}}0+\left|\overrightarrow{KA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta M}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{\Delta M}\right)+\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N\Delta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{\Delta M}\right)+0=$$

$$=\left|\overrightarrow{KA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta M}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu120^o+\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N\Delta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu0^o=$$

$$=-\left|\overrightarrow{KA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta M}\right|+\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N\Delta}\right|=0\quad\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\quad KA=N\Delta\quad\kappa\alpha\iota\quad\Delta M=AN$$

Οπότε $\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{NM}=0\Rightarrow\overrightarrow{KN}\perp\overrightarrow{NM}$

5.26 4)

α) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{\Delta Z}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AZ}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AZ}=$

$$\underset{\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{AZ}}{\overset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{\Delta A}}{=}}0+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AZ}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu180^o+\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta A}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu0^o\underset{AZ=BE}{\overset{\Delta A=AB}{=}}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AZ}\right|\cdot(-1)+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AZ}\right|=0$$

Οπότε $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AZ}=0\Rightarrow\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{\Delta Z}$

β) $\overrightarrow{Z\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta}=\left(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Delta}\right)=$

$$=\overrightarrow{ZA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ZA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{ZA}\cdot\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}+$$

$$+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=$$

$$0+\left|\overrightarrow{ZA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{ZA},\overrightarrow{BA}}\right)+0+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EB}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{EB}}\right)+0+$$

$$+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2+0+\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta\Gamma},\overrightarrow{BA}}\right)+0=$$

$$\underset{\substack{\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\\ \left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{EB}\right|}}{\overset{\left|\overrightarrow{ZA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|}{=}}=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=0$$

Οπότε $\overrightarrow{Z\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Delta}=0\Rightarrow\overrightarrow{Z\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Delta}$