5.19 1)

α' μέλος $=|\vec\alpha+\vec\beta|^2-|\vec\alpha-\vec\beta|^2=(\vec\alpha+\vec\beta)^2-(\vec\alpha-\vec\beta)^2=\vec\alpha^2+2\vec\alpha\vec\beta+\vec\beta^2-(\vec\alpha^2-2\vec\alpha\vec\beta+\vec\beta^2)=$

$=\cancel{\vec\alpha^2}+2\vec\alpha\vec\beta+\cancel{\vec\beta^2}-\cancel{\vec\alpha^2}+2\vec\alpha\vec\beta-\cancel{\vec\beta^2}=4\vec\alpha\vec\beta=\beta'$ μέλος

5.19 2)

$$(2\vec\alpha-\vec\beta)\perp(2\vec\alpha+\vec\beta)\Leftrightarrow(2\vec\alpha-\vec\beta)\cdot(2\vec\alpha+\vec\beta)=0\Leftrightarrow4\vec\alpha^2-\vec\beta^2=0\Leftrightarrow\vec\beta^2=4\vec\alpha^2\overset{\vec\alpha^2=|\vec\alpha|^2=4}{\Leftrightarrow}\vec\beta^2=4\cdot4\Leftrightarrow\vec\beta^2=16$$

Ακόμη $|\vec\alpha+\vec\beta|^2=(\vec\alpha+\vec\beta)^2=\vec\alpha^2+2\vec\alpha\vec\beta+\vec\beta^2\overset{\vec\alpha^2=4\ ,\ \vec\beta^2=16\ ,\ \vec\alpha\vec\beta=0}{=}4+2\cdot0+16=20$

Επομένως $|\vec\alpha+\vec\beta|^2=20\overset{|\vec\alpha+\vec\beta|\geq0}{\Rightarrow}|\vec\alpha+\vec\beta|=\sqrt{20}\Rightarrow|\vec\alpha+\vec\beta|=2\sqrt5$

5.19 3)

$|\vec\alpha+\vec\beta|^2+|\vec\alpha-\vec\beta|^2=(\vec\alpha+\vec\beta)^2+(\vec\alpha-\vec\beta)^2=\vec\alpha^2+2\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\beta^2+\vec\alpha^2-2\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\beta^2=$

$=2\vec\alpha^2+2\vec\beta^2=2|\vec\alpha|^2+2|\vec\beta|^2$

5.19 4)

$(\vec\alpha+\vec\beta)\cdot(\vec\alpha-\vec\beta)=\vec\alpha^2-\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\alpha\cdot\vec\beta-\vec\beta^2=\vec\alpha^2-\vec\beta^2=|\vec\alpha|^2-|\vec\beta|^2\overset{|\vec\alpha|=|\vec\beta|}{=}0$

5.19 5)

$|\vec\alpha+\vec\beta|=|\vec\alpha-\vec\beta|\Leftrightarrow|\vec\alpha+\vec\beta|^2=|\vec\alpha-\vec\beta|^2\Leftrightarrow(\vec\alpha+\vec\beta)^2-(\vec\alpha-\vec\beta)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec\alpha^2+2\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\beta^2-\vec\alpha^2+2\vec\alpha\cdot\vec\beta-\vec\beta^2=0\Leftrightarrow4\vec\alpha\vec\beta=0\Leftrightarrow\vec\alpha\cdot\vec\beta=0\Leftrightarrow\vec\alpha\perp\vec\beta$

5.19 6)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(\kappa\vec\alpha+\lambda\vec\beta)(\lambda\vec\alpha-\kappa\vec\beta)=0$

Είναι $(\kappa\vec\alpha+\lambda\vec\beta)(\lambda\vec\alpha-\kappa\vec\beta)=\kappa\lambda\vec\alpha^2-\kappa^2\vec\alpha\vec\beta=\lambda^2\vec\alpha\vec\beta-\kappa\lambda\vec\beta^2$

$\overset{\vec\alpha\perp\vec\beta\Rightarrow\vec\alpha\vec\beta=0}{=}\kappa\lambda\vec\alpha^2-\kappa\lambda\vec\beta^2=\kappa\lambda\left(|\vec\alpha|^2-|\vec\beta|^2\right)\overset{|\vec\alpha|=|\vec\beta|}{=}\kappa\lambda\cdot0=0$

5.19 7)

Είναι $(\vec\alpha+\vec\beta)\perp(\vec\alpha-\vec\beta)\Leftrightarrow(\vec\alpha+\vec\beta)(\vec\alpha-\vec\beta)=0\Leftrightarrow\vec\alpha^2-\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\alpha\vec\beta-\vec\beta^2=0\Leftrightarrow|\vec\alpha|^2=|\vec\beta|^2\Leftrightarrow|\vec\alpha|=|\vec\beta|$

και $\vec\alpha\cdot\vec\beta=|\vec\alpha|\cdot|\vec\beta|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta}\right)=|\vec\alpha|^2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{|\vec\alpha|^2}{2}$

Άρα $|3\vec\alpha+2\vec\beta|=7\Leftrightarrow(3\vec\alpha+2\vec\beta)^2=7^2\Leftrightarrow9\vec\alpha^2=12\vec\alpha\cdot\vec\beta+4\vec\beta^2=49\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow9\vec\alpha^2-\frac{12\cdot|\vec\alpha|^2}{2}+4\vec\alpha^2=49\Leftrightarrow9|\vec\alpha|^2-6|\vec\alpha|^2+4|\vec\alpha|^2=49\Leftrightarrow7|\vec\alpha|^2=49\Leftrightarrow|\vec\alpha|^2=7\Leftrightarrow|\vec\alpha|=\sqrt7=|\vec\beta|$

5.19 8)

Είναι $(\vec\alpha+\vec\beta)\perp(\vec\alpha-4\vec\beta)\Leftrightarrow(\vec\alpha+\vec\beta)(\vec\alpha-4\vec\beta)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec\alpha^2-4\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\alpha\cdot\vec\beta-4\vec\beta^2=0\Leftrightarrow\vec\alpha^2-3\vec\alpha\cdot\vec\beta-4\vec\beta^2=0\overset{\vec\alpha\perp\vec\beta}{\Leftrightarrow}\vec\alpha^2-4\vec\beta^2=0\qquad(1)$

Επίσης $|\vec\alpha-\vec\beta|=2\sqrt5\Leftrightarrow(\vec\alpha-\vec\beta)^2=(2\sqrt5)^2\Leftrightarrow\vec\alpha^2-2\vec\alpha\vec\beta+\vec\beta^2=20\overset{\vec\alpha\perp\vec\beta}{\Leftrightarrow}\vec\alpha^2+\vec\beta^2=20\qquad(2)$

Λύνουμε τις (1) , (2) ως σύστημα :

$$\begin{cases}\vec\alpha^2-4\vec\beta^2=0\\ \vec\alpha+\vec\beta^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec\alpha^2=4\vec\beta^2\\ 5\vec\beta^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec\alpha^2=16\\ \vec\beta^2=\frac{20}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec\alpha^2=4^2\\ \vec\beta^2=2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\vec\alpha|=4\\ |\vec\beta|=2\end{cases}$$

5.19 9)

Είναι $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\perp\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=0\overset{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0}{\Leftrightarrow}3\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=0 \qquad (1)$

Επίσης $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=1\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=1\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1\overset{\vec{\alpha}\vec{\beta}=0}{\Leftrightarrow}\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=1 \qquad (2)$

Λύνουμε τις (1) , (2) ως σύστημα :

$$\begin{cases}3\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=0\\ \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2\\ 4\vec{\alpha}^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{\beta}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \left|\vec{\alpha}\right|=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Επίσης $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\cdot 0+9\cdot\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$

Επομένως $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\frac{31}{4}\Leftrightarrow\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=\frac{\sqrt{31}}{2}$

5.19 10)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=0$

Είναι $\vec{\beta}\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0 \qquad (1)$

Επίσης $\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0 \qquad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) , (2) : $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=0$

Άρα $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$

5.19 11)

Είναι $\left|\vec{\gamma}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+5\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\cdot 5\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+25\vec{\beta}^2\overset{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0}{=}\vec{\alpha}^2+25\vec{\beta}^2\overset{\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|}{=}26\vec{\alpha}^2$

Και $\left|\vec{\delta}\right|^2=\left(\vec{\beta}-5\vec{\alpha}\right)^2=\vec{\beta}^2-10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+25\vec{\alpha}^2\overset{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0}{=}\vec{\alpha}^2+25\vec{\alpha}^2\overset{\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|}{=}26\vec{\alpha}^2$

Άρα $\left|\vec{\gamma}\right|^2=\left|\vec{\delta}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\delta}\right|$

5.19 12)

Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{2}$

Είναι $\left|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|^2=\sqrt{13}^2\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=13\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\left|\vec{\alpha}\right|^2-12\cdot\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{2}+4\left|\vec{\beta}\right|^2=13\Leftrightarrow 9\cdot 1-6\left|\vec{\beta}\right|+4\left|\vec{\beta}\right|^2=13\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left|\vec{\beta}\right|^2-6\left|\vec{\beta}\right|-4=0\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=2$ ή $\left|\vec{\beta}\right|=-\frac{1}{2}<0$ απορρίπτεται

5.19 13)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|-\sqrt{3}\left|\vec{\alpha}\right|=0$

Είναι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow$

$\vec{\beta}\cdot\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2=0\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\left|\vec{\beta}\right|^2$

Άρα είναι $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\overset{\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|}{\Leftrightarrow}\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=3\left|\vec{\alpha}\right|^2\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{\alpha}\right|$