

Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

4.49 1)

Το Δ είναι μέσο του ΑΟ οπότε έχει συντεταγμένες $\Delta\left(\frac{0+0}{2}, \frac{\beta+0}{2}\right)$ ή $\Delta\left(0, \frac{\beta}{2}\right)$

Έστω $E(x, y)$. Τότε είναι $\overrightarrow{AE} = (x, y - \beta)$ και $\overrightarrow{AG} = (-\alpha - 0, 0 - \beta) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (-\alpha, -\beta)$.

$$\text{Επομένως } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x, y - \beta) = \frac{1}{3}(-\alpha, -\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{3} \\ y - \beta = -\frac{\beta}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{3} \\ y = \frac{2\beta}{3} \end{cases}. \text{ Άρα } E\left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\beta}{3}\right)$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \overrightarrow{\Delta E} = \left(-\frac{\alpha}{3} - 0, \frac{2\beta}{3} - \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} = \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{6}\right) \text{ και } \overrightarrow{\Delta B} = \left(\alpha - 0, 0 - \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\Delta B} = \left(\alpha, -\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{οπότε } \det(\overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta B}) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{3} & \frac{\beta}{6} \\ \alpha & -\frac{\beta}{2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha\beta}{6} - \frac{\alpha\beta}{6} = 0 \text{ άρα } \overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{\Delta B} \text{ που σημαίνει ότι τα σημεία } B, \Delta$$

και E είναι συνευθειακά

4.49 2)

Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$. Άρα είναι:

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\alpha}{2} - 0, \frac{\beta}{2} - 0\right) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \text{ και } |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{Επίσης } \overrightarrow{BG} = (\alpha - 0, \beta - 0) = (\alpha, \beta) \text{ και } |\overrightarrow{BG}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{Επομένως } |\overrightarrow{BG}| = 2|\overrightarrow{OM}| \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \frac{|\overrightarrow{BG}|}{2}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας

4.49 3)

Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right)$.

Το Ν είναι το μέσο του ΑΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $N\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \frac{\beta+\zeta}{2}\right)$.

Επομένως:

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\zeta}{2} - \frac{\beta+\delta}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\varepsilon-\gamma}{2}, \frac{\zeta-\delta}{2}\right)$$

$$\text{Επίσης } \overrightarrow{BG} = (\varepsilon - \gamma, \zeta - \delta)$$

$$\text{Επομένως } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BG} \text{ και } |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BG}|$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

4.49 4)

Το Κ είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right)$.

Το Λ είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $L\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}, \frac{\delta+\zeta}{2}\right)$.

Το Μ είναι το μέσο του ΓΔ, οπότε έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\eta+\varepsilon}{2}, \frac{\theta+\zeta}{2}\right)$.

Το Ν είναι το μέσο του ΑΔ, οπότε έχει συντεταγμένες $N\left(\frac{\alpha+\eta}{2}, \frac{\beta+\theta}{2}\right)$.

Επομένως:

$$\overrightarrow{KL} = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\delta + \zeta}{2} - \frac{\beta + \delta}{2} \right) = \left(\frac{\varepsilon - \alpha}{2}, \frac{\zeta - \beta}{2} \right) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{NM} = \left(\frac{\eta + \varepsilon}{2} - \frac{\alpha + \eta}{2}, \frac{\zeta + \theta}{2} - \frac{\beta + \theta}{2} \right) = \left(\frac{\varepsilon - \alpha}{2}, \frac{\zeta - \beta}{2} \right)$$

Οπότε είναι $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{KL} // \overrightarrow{NM}$ και $|\overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{NM}|$

Άρα το KLMN είναι παραλληλόγραμμο , αφού έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες